



Flávio Vieira Quintino

Licenciado em Engenharia Civil

Controlo Activo de Vibrações em Edifícios

Dissertação apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil na especialidade de Estruturas e Geotecnia

Orientador: Doutora Ildi Cismasiu

Júri:

Presidente: Prof. Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves

Arguente: Prof. Doutor Filipe Santos

Vogal: Prof^a. Doutora Ildi Cismasiu



**FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA**

Janeiro de 2012

“Copyright” **Flávio Vieira Quintino, FCT/UNL E UNL**

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Quero antes de mais manifestar o meu agradecimento a todas as pessoas que me ajudaram no desenvolvimento deste trabalho, tendo cada um em particular contribuído com o seu incentivo, devoção e amizade. De entre todos, gostaria de manifestar a minha especial gratidão à Doutora Ildi Cismasiu pelo trabalho de orientação desta dissertação, pelo seu empenhamento e disponibilidade, pelos comentários sempre sábios e oportunos, pela correcção dos textos e pelas facilidades e meios que colocou ao meu dispor no decorrer deste trabalho.

Um especial agradecimento a toda a minha família pelo apoio e força que me deram ao longo da minha vida para que conseguisse realizar todos os meus objectivos. Não posso também deixar-me esquecer dos meus amigos e colegas nomeadamente o Leonardo Rodrigues, João Gandaio, Micael Inácio, Miguel Pires, Helena Assunção e Tânia Nascimento que sempre me ajudaram e apoiaram.

Resumo

As estruturas de Engenharia Civil, como edifícios altos e obras de arte, quando sujeitas a vibrações excessivas, podem comprometer o conforto dos seus utilizadores e, em casos extremos, a sua segurança. De forma a atenuar estes problemas, têm-se desenvolvido e aplicado diversos sistemas de controlo, com o objectivo de melhorar o comportamento dinâmico das estruturas.

A presente dissertação descreve, sucintamente, os vários sistemas de controlo possíveis de serem utilizados em estruturas de engenharia civil. Neste trabalho, estudou-se o controlador activo AMD (*“Active Mass Damper”*) para um modelo de um pórtico de dois pisos, quando solicitado por uma acção sísmica.

A partir das equações do movimento da estrutura representadas em espaço de estados, obtidas através da abordagem Lagrangeana, recorreu-se à retroacção de estados para o dimensionamento do controlador.

No dimensionamento do controlador, usou-se o método do regulador linear quadrático (LQR), com o objectivo de alcançar determinado desempenho com o menor gasto de energia possível. Após o dimensionamento do controlador, foi obtido um observador de estados através da combinação do filtro de Kalman com o regulador linear quadrático (LQR), sendo este método denominado por regulador linear Gaussiano (LQG), e avaliado o seu funcionamento.

O desempenho dos sistemas de controlo dimensionados foi avaliado por simulação numérica no MATLAB e SIMULINK, quando sujeitos a acções sísmicas.

Com este trabalho é possível verificar que o controlo activo permite reduzir eficazmente a resposta estrutural quando solicitado por acções sísmicas e compreender a dificuldade no dimensionamento de um controlador de vibração.

Palavras chave: AMD-Amortecedor de Massa Activo; Controlo Óptimo; Controlo de Vibrações; Dimensionamento de Controladores.

Abstract

Civil Engineering structures, such as tall buildings and art works, when exposed to excessive vibrations can compromise the comfort of its users and, in extreme cases, their safety. In order to mitigate the consequences of these problems and to improve the dynamic behavior of the structures several control systems have been developed and applied. The most popular control systems that can be used in civil engineering structures are briefly described and discussed in this dissertation.

Modern control techniques were applied to design an active control system to mitigate the structural response of a seismically excited building model, consisting of two floors, equipped with an AMD ("Active Mass Damper") on the top floor. The space-state model of the structure was derived following the Lagrangian approach.

The controller design is based on the linear quadratic regulator (LQR) that implement full-state feedback algorithm. The controller gains were obtained by minimizing the total energy of the system. The incorporation of a state estimator in the control algorithm is necessary whenever not all states are available by measurements. The observer is obtained by the combination of a Kalman filter and the linear-quadratic regulator (LQR), a method called linear-regulator Gaussian (LQG).

The performance of the designed control system was assessed by numerical simulations in MATLAB and SIMULINK. The results show that the active control can effectively reduce the effects of the seismically excited structure.

Key-words: AMD—Active Mass Damper; Controlers Design; Optimal Control; Vibration Control.

Simbologia

$|x_c|$ deslocamento máximo absoluto do carrinho

$|x_{f1}|$ deslocamento máximo absoluto do primeiro piso

$|x_{f2}|$ deslocamento máximo absoluto do segundo piso

$\omega_{d,i}$ frequência de amortecimento do modo de vibração i

ω_i frequência natural do modo de vibração i

ξ_i coeficiente de amortecimento do modo de vibração i

A matriz de entrada

AMD Amortecedor de massa activa (Active mass damper)

B matriz de entrada do sinal de controlo

B_{sismo} matriz de entrada do sinal

B_{sismo} matriz de entrada do sinal devido à solicitação de base

B_{sismo} matriz de entrada do sinal do sismo

C matriz de saída

C_b matriz de controlabilidade

D matriz de transmissão directa do sinal de controlo

D_{sismo} matriz de transmissão directa devido à solicitação de base

D_{sismo} matriz de transmissão directa do sinal do sismo

$e(t)$ vector estimativa do erro

$G(s)$ função de transferência

x

I	matriz identidade
J	função de custo quadrática do gasto de energia em tempo contínuo
J	função de custo quadrática do gasto de energia em tempo discreto
K_s	matriz de rigidez do sistema
L	Lagrangeano do sistema
L_K	matriz de ganho do observador (ganho do filtro de Kalman)
L_K	vector do ganho de Kalman
LQG	Regulador linear Gaussiano (Linear Quadratic Gaussian)
LQR	Regulador linear quadrático (Linear Quadratic Regulator)
M_s	matriz de massa do sistema
O_b	matriz de observabilidade
Q	matriz de ponderação relativa aos estados
q_k	cordenada generalizada k
R	matriz de ponderação relativa ao sinal de controlo
T	energia cinética do sistema
t	tempo
t_f	tempo final
t_f	tempo final
t_s	tempo de estabelecimento
$u(t)$	vector de entrada do sinal de controlo
V	energia potencial do sistema
v	sinal do ruído
V_m	diferença de potencial despendida
w	sinal de distúrbio
$x(t)$	vector de estado
x_0	vector de estado estimado pelo observador
x_d	vector de estado desejado
$y(t)$	vector de saída

Índice de Texto

1	Introdução	1
1.1	Problemas de vibrações em estruturas	1
1.2	Objectivos da dissertação	2
1.3	Organização da dissertação	2
1.4	Caracterização de sistemas de controlo em edifícios	3
1.4.1	Sistemas Passivos	3
1.4.2	Sistemas activos	5
1.4.3	Sistemas Semi-Activo	8
1.4.4	Sistemas Híbridos	9
1.4.5	Aplicações de Controlo em Portugal	11
2	Modelação e Fundamentos dos Sistemas de Controlo	13
2.1	Introdução	13
2.1.1	Diagrama de Blocos	14
2.1.2	Tipos de Malha	14
2.1.3	Tipos de Realimentação	15
2.1.4	Função de Transferência de um sistema em Malha Fechada	17
2.1.5	Espaço de Estados de um sistema de Malha Fechada	20

3	Modelação e Fundamentos de Sistemas Dinâmicos	21
3.1	Modelação de Sistemas Dinâmicos	21
3.1.1	Modelação no Domínio da Frequência	23
3.1.1.1	Determinação da função da resposta em frequência	23
3.1.1.2	Diagrama de Bode	25
3.1.2	Modelação no Domínio do Tempo	26
3.2	Equações do Movimento	27
3.3	Descrição do modelo de laboratório	28
3.3.1	Equação do movimento da estrutura com AMD a uma solicitação de base	29
3.4	Espaço de Estados	32
3.4.1	Representação do sistema com AMD activo	34
3.4.2	Representação do sistema com AMD passivo	35
3.4.3	Representação do sistema com AMD fixo	35
3.5	Funções de Transferência	36
3.6	Conversão de Espaço de Estado para Funções de Transferência	37
3.7	Representação do sistema com AMD activo na forma de Funções de Transferência	38
3.8	Determinação das características físicas de um sistema linear	38
3.8.1	Método do Lugar das Raízes	39
3.9	Características dinâmicas do sistema	41
3.9.1	Características dinâmicas do sistema com AMD fixo	42
3.9.2	Características dinâmicas do sistema com AMD passivo e com AMD activo	43

4	Dimensionamento de Controladores	49
4.1	Dimensionamento Via Realimentação de Estados	49
4.1.1	Controlabilidade	49
4.1.2	Observabilidade	50
4.1.3	Estabilidade	51
4.2	Regulador Linear Quadrático (LQR)	51
4.2.1	Equação de Riccati para o tempo contínuo	53
4.2.2	Equação de Riccati para o tempo discreto	53
4.3	Regulador Linear Quadrático Gaussiano (LQG)	54
4.4	Observador de Estados	56
4.5	Filtro de Kalman	57
4.5.1	Filtro de Kalman de tempo contínuo	58
4.5.2	Filtro de Kalman de tempo discreto	60
5	Implementação de um sistema de controle	63
5.1	Dimensionamento de Controladores	63
5.1.1	Análise da Controlabilidade	64
5.1.2	Simulação em SIMULINK do AMD	64
5.1.3	Dimensionamento do controlador LQR	65
5.2	Dimensionamento do Observador de Estados	75
5.2.1	Análise da Observabilidade	76
5.2.2	Dimensionamento do observador via LQG	77

6	Modelo dinâmico e interacção do sistema de controlo	83
6.1	Representação em Espaço de Estados a uma solicitação de base com AMD fixo	83
6.1.1	Simulação em SIMULINK	84
6.2	Representação em Espaço de Estados a uma solicitação de base com AMD .	85
6.2.1	AMD passivo	85
6.2.2	AMD activo	86
6.2.2.1	Simulação em SIMULINK	86
6.2.3	Apresentação de Resultados com AMD fixo/AMD passivo	88
6.2.3.1	Sismo de Chichi	88
6.2.4	Apresentação de Resultados com AMD passivo/AMD activo	90
6.2.4.1	Sismo de Chichi	90
6.3	Comparação de Resultados	91
7	Conclusões	93
	Bibliografia	95
A	Representação matemática de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo	101
A.1	Definição da Transformada de Laplace	101
A.2	Transformada Inversa de Laplace	102
B	Parâmetros do sistema	103
B.1	Representação matricial do sistema em espaço de estados	103
C	Programa em Matlab do observador de estados	105
D	Apresentação de resultados com AMD fixo/AMD passivo	109
E	Apresentação de resultados com AMD passivo/AMD activo	115

Lista de Figuras

1.1	Taipei 101	4
1.2	TLDs	5
1.3	Configuração básica de um sistema de Controlo Activo	6
1.4	Kyobashi Seiwa	7
1.5	Applause Tower	8
1.6	Kajima Research	9
1.7	Shinjuku Park Tower	10
1.8	Pontes com protecção sísmica em Portugal	11
1.9	Ponte Pedonal Pedro e Inês, Coimbra	12
1.10	Hospital da Luz, Lisboa.	12
2.1	Esquema de um diagrama de bloco	14
2.2	Diagrama de bloco de um sistema em malha aberta	15
2.3	Diagrama de bloco de um sistema em malha fechada	15
2.4	Diagrama de bloco de um sistema em malha fechada com realimentação negativa	16
2.5	Diagrama de bloco de um sistema em malha fechada com realimentação positiva	16
2.6	Funções de Transferência de um sistema de Malha Fechada	17
2.7	Função de transferência equivalente de um sistema de malha fechada	18
2.8	Diagrama de bloco para um controlador do tipo integral	19

2.9	Diagrama de bloco para um controlador do tipo derivativo	19
2.10	Diagrama de blocos em espaço de estados de um sistema de malha fechada . .	20
2.11	Diagrama de blocos de um sistema controlado via realimentação de estados .	20
3.1	Modelação de um sistema mecânico	21
3.2	Exemplo de um Diagrama de Bode	26
3.3	Modelo de AMD e os seus equipamentos	28
3.4	Active Mass Dumper(AMD)	29
3.5	Representação do modelo com aceleração de base	29
3.6	Representação dos pólos no plano complexo	40
3.7	Pólos do sistema com AMD fixo	42
3.8	Deslocamentos relativos de cada piso para condições iniciais não nulas com AMD fixo	43
3.9	Pólos do sistema com AMD passivo e com AMD activo	44
3.10	Função de resposta em frequência do AMD passivo	45
3.11	Deslocamentos relativos do AMD e de cada piso para condições iniciais não nulas com AMD passivo	46
3.12	Deslocamentos relativos do AMD e dos pisos para a função impulso com AMD passivo	47
4.1	Sistema de controlo por realimentação de estados utilizando observador. . . .	57
5.1	Diagrama de blocos para o sistema AMD	64
5.2	Diagrama de blocos de Espaço de Estados	65
5.3	Variação dos pólos do sistema em função do parâmetro R	69
5.4	Efeito do parâmetro R na dinâmica da estrutura - caso 5-8	70
5.5	Efeito do parâmetro R no esforço de controlo V_m	71
5.6	Deslocamentos do AMD e dos pisos para condições iniciais não nulas	71

5.7	Deslocamento do AMD e dos pisos para condições iniciais não nulas referentes ao efeito q_{66}	72
5.8	Deslocamento do AMD e dos pisos para condições iniciais não nulas	74
5.9	Função de resposta em frequência do sistema não controlado e controlado referente aos casos 6,9 e 17.	74
5.10	Diagrama de blocos para o sistema AMD-2	75
5.11	Diagrama de blocos de Espaço de Estados	75
5.12	Diagrama de blocos do Observador de Estados	76
5.13	Comparação entre o vector de estados e sua estimativa - caso 1	78
5.14	Comparação entre o vector de estados e sua estimativa - caso 2	79
5.15	Comparação entre o vector de estados e sua estimativa - caso 3	80
5.16	Comparação entre o vector de estados e sua estimativa - caso 4	81
5.17	Saídas do sistema observado	81
6.1	Diagrama de blocos da simulação a uma solicitação de base(Sismo de Kobe) com AMD fixo	84
6.2	Diagrama de blocos da simulação para uma solicitação de base	86
6.3	Diagrama de blocos de espaço de estados da simulação para uma solicitação de base	87
6.4	Diagrama de blocos do observador de estados da simulação para uma solicitação de base	87
6.5	Sinal equivalente a aceleração de base do sismo de Chichi	88
6.6	Aceleração relativa dos pisos - Sismo de Chichi	89
6.7	Deslocamentos relativos dos pisos - Sismo de Chichi	89
6.8	Acelerações relativas dos pisos via LQG - Sismo de Chichi	90
6.9	Deslocamentos relativos dos pisos e do AMD via LQG - Sismo de Chichi	91
6.10	Diferença de potencial via LQG - Sismo de Chichi	91

D.1	Sinal equivalente a aceleração de base do sismo de Kobe	109
D.2	Acelerações relativas dos pisos - Sismo de Kobe	110
D.3	Deslocamentos relativos dos pisos - Sismo de Kobe	110
D.4	Sinal equivalente a aceleração de base do sismo de Friuli	111
D.5	Acelerações relativas dos pisos - Sismo de Friuli	112
D.6	Deslocamentos relativos dos pisos - Sismo de Friuli	112
D.7	Sinal equivalente a aceleração de base do sismo de Northridge	113
D.8	Acelerações relativas dos pisos - Sismo de Northridge	113
D.9	Deslocamentos relativos dos pisos - Sismo de Northridge	114
E.1	Acelerações relativas dos pisos via LQG - Sismo de Kobe	115
E.2	Deslocamentos relativos dos pisos e do AMD via LQG - Sismo de Kobe	116
E.3	Diferença de potencial via LQG - Sismo de Kobe	116
E.4	Acelerações relativas dos pisos via LQG - Sismo de Friuli	117
E.5	Deslocamentos relativos dos pisos e do AMD via LQG - Sismo de Friuli	117
E.6	Diferença de potencial via LQG - Sismo de Friuli	118
E.7	Acelerações relativas dos pisos via LQG - Sismo de Northridge	118
E.8	Deslocamentos relativos dos pisos e do AMD via LQG - Sismo de Northridge	119
E.9	Diferença de potencial via LQG - Sismo de Northridge	119

Lista de Tabelas

3.1	Características da estrutura	28
3.2	Pólos do sistema com AMD fixo	42
3.3	Características dinâmicas da estrutura com AMD fixo	43
3.4	Pólos do sistema com AMD passivo e com AMD activo	44
3.5	Características dinâmicas da estrutura	45
5.1	Valores máximos admissíveis para as variáveis do sistema	66
5.2	Matriz de ponderação Q e R para os vários casos	67
5.4	Comparação dos valores máximos das variáveis do sistema para os vários casos	67
5.3	Características dinâmicas dos modos de vibração do sistema não controlado e controlado em rad/s e em percentagem.	68
6.1	Valores máximos obtidos através da simulação dos vários sismos	92

Capítulo 1

Introdução

1.1 Problemas de vibrações em estruturas

A problemática de vibrações em estruturas é motivo de preocupação por parte da comunidade científica. O estudo de técnicas de controlo tem vindo a ser fortemente desenvolvido no último século, de forma a minimizar os danos causados por acções externas, que estão fora do controlo humano, tais como vibrações resultantes de sismos ou ventos. Estas forças, ao actuarem na estrutura, podem alterar o seu comportamento, bem como colocar em causa a segurança e o conforto dos seus ocupantes. Os problemas de vibrações em estruturas podem ser agrupados em dois domínios distintos, nomeadamente, os problemas de vibrações que podem afectar a integridade estrutural, e os problemas relacionados com o nível de conforto proporcionado aos seus ocupantes. Actualmente existem diversos regulamentos que estabelecem critérios de avaliação das vibrações segundo o propósito a que as estruturas se destinam. Em primeiro lugar, o que está em causa é o Estado Limite Último de resistência das estruturas, devido às acções exteriores adversas, estas podem induzir danos estruturais significativos ou, em última análise, levar estas estruturas ao colapso. Certamente que, para a comunidade científica esta é a área que mais a inquieta, dado o nível do impacto social e económico resultante dos efeitos desastrosos provocados pela acção sísmica. Devido a tal preocupação, é neste campo que se tem intervindo no maior número de aplicações de técnicas de controlo com o objectivo de melhorar o processo de dissipação de energia ou de criar um sistema de isolamento sísmico. A segunda parte de problemas está relacionada com o cumprimento do Estado Limite de Utilização das estruturas de betão armado, no que diz respeito à satisfação de níveis máximos de vibração por forma a controlar a fendilhação dos elementos estruturais e não estruturais garantido assim um bom conforto dos utilizadores bem como boas condições de serviço.

Para a atenuação das vibrações em estruturas existem alguns meios que podem solucionar este problema, tais como: a modificação da rigidez, da massa, o amortecimento ou forma da estrutura, ou ainda a aplicação de sistemas de controlo. Presentemente, podemos dividir o controlo estrutural em quatro grupos: controlo passivo, activo, semi-activo e híbrido,[11].

1.2 Objectivos da dissertação

Este trabalho tem como objectivo o estudo do comportamento dinâmico das estruturas porticadas quando sujeitas a acções sísmicas, através da modelação, em MATLAB, da eficiência do controlo activo utilizando um amortecedor de massa activo-AMD (Active Mass Damper) através de simulações utilizando o programa SIMULINK.

Pretende-se estudar o funcionamento de um controlador determinístico do tipo regulador linear quadrático (LQR) associado a um observador estocástico de tipo filtro de Kalman, designado regulador linear quadrático gaussiano (LQG). Em particular pretende-se analisar a influência dos diversos parâmetros na resposta do sistema e na capacidade do observador do tipo filtro de Kalman em estimar os estados a partir de um sistema estocasticamente perturbado ou na presecção do ruído presente nas medições.

Na avaliação da eficiência do algoritmo de controlo LQG pretende-se comparar os resultados simulados com os resultados do trabalho de Rodrigues, [35] obtidos utilizando um controlador LQR baseado na estimação dos estados via alocação dos pólos.

1.3 Organização da dissertação

Esta dissertação está organizada em 5 partes. Na primeira parte é apresentada quais os objectivos propostos. Neste capítulo, referem-se, ainda, a problemática das vibrações em estruturas, a caracterização das técnicas de controlo passíveis de serem aplicadas e suas utilizações em estruturas reais. Neste capítulo, referem-se, ainda, quais os objectivos definidos.

A segunda parte, apresentada no capítulo 2, trata-se da modelação e análise de sistemas de controlo moderno.

Na terceira parte, onde se incluem os capítulos 3, 4 e 5, aborda a representação de sistemas dinâmicos, Espaço de Estado, Funções de Transferência e Transformadas de Laplace, por fim, do dimensionamento de controladores.

Na quarta parte, capítulo 6, são feitas simulações do comportamento do sistema mediante várias situações, através dos programas MATLAB e SIMULINK e implementa-se um sistema de controlo do tipo LQR e do estimador LQG num modelo laboratorial. Também são analisadas as respostas obtidas para a estrutura com AMD fixo, estrutura com AMD inactivo (amortecimento passivo) e com AMD activo.

Por fim, no capítulo 7, descrevem-se as principais conclusões deste trabalho no que respeita à implementação de um sistema de controlo do tipo LQR e do estimador LQG. Também se realizou uma comparação dos resultados provenientes do método da alocação de pólos,[35], com o método estudado na presente dissertação.

1.4 Caracterização de sistemas de controlo em edifícios

1.4.1 Sistemas Passivos

O controlo passivo é um sistema que não necessita de nenhuma fonte externa de energia. Incluídos neste tipo de controlo existem os seguintes sistemas de dissipação de energia: os amortecedores viscosos, os viscoelásticos, os friccionais ou histeréticos e o isolamento de base. O isolamento de base é o sistema de controlo passivo mais utilizado para reduzir os danos em estruturas devido a actuação sísmica. Este sistema consiste em apoiar a estrutura em aparelhos que permitem dissipar energia não deixando que esta seja transmitida à estrutura quando a ocorrência de um sismo. A dissipação da energia varia conforme os vários tipos de apoio. Existem os aparelhos de apoio de borracha com núcleo de chumbo (LRB) e os de borracha de alto amortecimento (HDRB), que permitem dissipar energia através da deformação dos materiais que os compõem, enquanto os sistemas pendulares friccionais (FPS) dissipam energia por atrito, [45].

No que diz respeito a sistemas passivos que actuam por absorção das vibrações, existem os amortecedores de massa sintonizada, vulgarmente conhecidos como TMDs ("Tuned Mass Damper"), e os amortecedores de líquido sintonizado, conhecidos como TLDs ("Tuned Liquid Dampers"). Os TMDs são dispositivos mecânicos compostos por uma massa ligada à estrutura através de uma mola e de um amortecedor, que, quando devidamente sintonizados, introduzem compensação de fase ao movimento do sistema principal reduzindo o seu comportamento dinâmico à custa da absorção da energia mecânica por parte da massa passiva do aparelho. Os TMDs também podem ser materializados através do funcionamento de um pêndulo fixo à estrutura, cuja aplicação é particularmente interessante nos casos em que a frequência própria do sistema a controlar é relativamente baixa. Estes dispositivos demonstraram ser bastante úteis no controlo de vibrações harmónicas, de estruturas flexíveis como edifícios altos e pontes de grande vão, bem como aplicações em estruturas vulneráveis a fenómenos de ressonância como lajes de edifícios e pontes pedonais quando solicitadas pela acção do vento. Apesar de serem menos eficientes no controlo de vibrações devidas a terremotos, estes dispositivos desempenham também um papel importante na redução da resposta sísmica de estruturas, tirando partido do nível de amortecimento adicional resultante da sua adaptação a estes sistemas, [44]. Para um bom funcionamento, os TMDs necessitam de estar devidamente sintonizados para a frequência de vibração de estrutura, podendo registar-se uma significativa perda de eficiência mesmo para pequenos desvios de calibração. Cada dispositivo destes só pode atenuar a resposta de um modo de vibração específico, ou seja, a resposta dos restantes modos pode não ser amortecida, podendo mesmo ser amplificada. Assim, deve adoptar-se pelos menos, tantas unidades quantos os modos distintos que se querem controlar,[44].

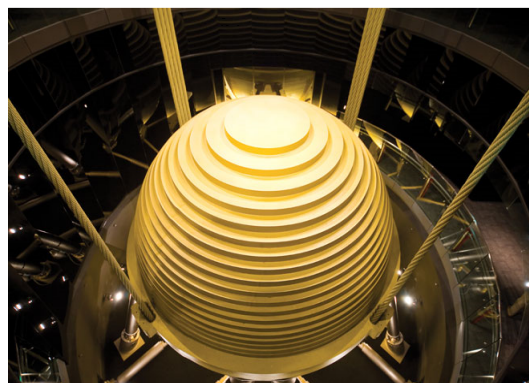
A primeira aplicação de um TMD foi na torre de televisão CN Tower em Toronto, com 553 m, construída no ano de 1975, que permaneceu classificada como a estrutura mais alta do mundo até 2007. Nesta estrutura, e para o efeito desejado, foram concebidos dois dispositivos de

funcionamento pendular com 9 ton de massa cada, com o objectivo de reduzir a resposta estrutural à acção do vento, [17]. Existe um caso mais recente onde também foi aplicado este sistema, nomeadamente no edifício Taipei 101 localizado na ilha de Taiwan na China, construído em 2004 (Figura 1.1a) . No sentido de atenuar a resposta estrutural devido à acção do vento, foi instalado no topo um TMD de funcionamento pendular constituído por uma massa de geometria esférica de 650 ton , suspensa através de 4 cabos de aço e amortecida pela adaptação à base de 8 amortecedores viscosos demonstrado na Figura 1.1b. Espera-se que este dispositivo consiga reduzir a resposta dinâmica desta estrutura de 0.15 Hz de frequência natural em cerca de 40% , [6].

Os TLDs têm especial interesse em aplicações cujos sistemas apresentem uma baixa frequência de vibração, constituindo uma solução atractiva do ponto de vista económico e pelo facto de poderem ser facilmente sintonizados por adição ou subtracção de líquido. Contudo, têm as mesmas limitações que os TMDs, ou seja, só atingem um adequado grau de eficiência se estiverem devidamente sintonizados, e podem controlar individualmente um modo de vibração específico. Este tipo de controlo de vibrações através do uso de TLDs foi implementado no Hotel Cosima, em Tóquio, composto por 25 pisos e com uma altura total de 106 m, devido à excentricidade da sua arquitectura (Figura 1.2a). O principal objectivo foi o de reduzir o comportamento dinâmico face a acções provenientes de ventos e sismos. Assim, foi instalado no topo, um TLD de colunas líquidas conhecido como TLCD, o qual, apresenta uma massa de 58 ton , permitindo assim reduzir a resposta dinâmica da estrutura em cerca de 50% [37]. Outro exemplo, diz respeito à utilização de TLDs no topo do hotel Shin-Yokohama, no Japão (Figura 1.2b),[37].



(a) Edifício Taipei 101



(b) TMD instalado no Taipei 101

Figura 1.1: Taipei 101



Figura 1.2: TLDs

1.4.2 Sistemas activos

A implementação de sistemas de controlo activo tem especial interesse em estruturas flexíveis que apresentem uma dinâmica onde vários modos de vibração podem contribuir significativamente para a resposta estrutural, ou quando os parâmetros modais do sistema variam substancialmente ao longo do tempo,[21].

Assim, entende-se por controlo activo, aquele que actua com base em dados obtidos, em tempo real, do comportamento da estrutura, através de sensores físicos localizados na estrutura para medir excitações externas e variáveis de resposta estrutural, ajustando a acção de controlo conforme as acções impostas e os objectivos que se pretendem. Esta acção de controlo necessita sempre de uma fonte de energia externa que permite a aplicação de forças controláveis através de dispositivos, segundo a direcção desejada. As forças em questão, podem ser usadas para adicionar ou dissipar energia [21]. Este sistema de controlo apresenta uma elevada eficiência e é particularmente usado no controlo de vibrações causadas por ventos fortes ou sismos moderados. Contudo, apresenta desvantagens tais como: necessitar de uma quantidade elevada de energia para manter os actuadores em funcionamento, e o facto de estes pararem quando a energia falha. Estes actuadores podem ser analógicos, gerando um sinal de controlo contínuo no tempo, ou digitais, gerando um sinal de controlo discreto. Actualmente, os actuadores digitais são os mais utilizados devido ao seu custo mais acessível e à sua melhor capacidade de memória e precisão.

Os sistemas de controlo activo actuam com base em medições das respostas estruturais registadas por sensores, sendo os sinais tratados por intermédio de algoritmos computacionais que por sua vez emitem um sinal ao actuador,[11] e [21], como demonstrado na Figura 1.3.

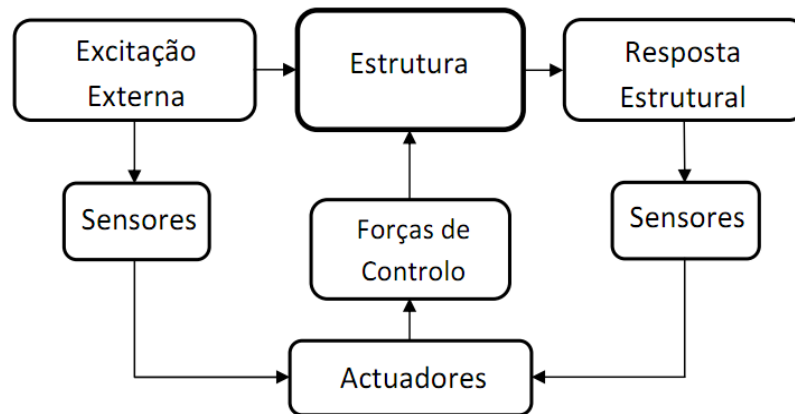


Figura 1.3: Configuração básica de um sistema de Controlo Activo

Este tipo de controlo pode ser materializado através de amortecedores de massa activa, (“Active Mass Damper”-AMD), desenvolvidos no fim do ano de 1980, cabos activos, diagonais activas ou actuadores piezoeléctricos, [11]. O uso de materiais piezoeléctricos no controlo de vibrações em estruturas flexíveis tem sido fortemente estudado nas últimas duas décadas. Estes materiais são bastante adequados para o controlo estrutural de vibrações, através de sensores ou actuadores, devido à sua grande capacidade de conversão directa de energia eléctrica para energia mecânica, ou vice-versa, [32].

No que diz respeito a aplicações de sistemas de controlo activo, o Japão é o país que apresenta maior número de aplicações. O primeiro sistema de controlo de vibrações do tipo activo foi implementado no ano de 1989, no edifício Kyobashi Seiwa. Este edifício é constituído por 11 pisos, com 33 metros de altura e é bastante susceptível a vibrações transversais causadas por ventos e sismos, devido à sua elevada esbelteza (Figura 1.4a). O sistema de controlo instalado é constituído por dois AMD’s localizados na sua cobertura, com o objectivo de proporcionar aos seus utilizadores algum nível de conforto quando solicitado por acções sísmicas de baixa intensidade e por ventos fortes. Um dos AMD’s constituído por uma massa de 4.2 ton, encontra-se colocado muito perto do centro de gravidade do edifício de forma a controlar deslocamentos transversais, enquanto a segunda massa, com 1.2 ton, está colocada na parte frontal da cobertura para controlar vibrações de torção (Figura 1.4b). O dimensionamento deste sistema faz com que exista uma redução da resposta estrutural entre 35% e 50% dos deslocamentos transversais da estrutura. Deste modo, com o uso deste controlo, foram obtidos resultados bastante aceitáveis em relação ao nível do amortecimento dos três primeiros modos de vibração, tendo-se conseguido um aumento de 20% no primeiro modo de vibração, enquanto no segundo e terceiro modo esse aumento foi de 5%, [2].



(a) Edifício Kyobashi Seiwa



(b) Esquema do sistema de controlo activo instalado no edifício Kyobashi Seiwa

Figura 1.4: Kyobashi Seiwa

Existe ainda outro caso bem conhecido da instalação de AMD's para controlo de vibrações em edifícios altos, referente ao Applause Tower, localizado também no Japão, na cidade de Osaka, o qual foi concluído em 1992. Este edifício tem 34 andares e uma altura de 161 metros. Utilizou-se a plataforma do último piso de 480 *ton* destinada a um heliporto como massa activa do sistema de controlo (Figura 1.5a), sendo esta a maior massa activa usada até hoje em sistemas deste tipo. Neste caso, a plataforma é apoiada na estrutura por intermédio de apoios semelhantes àqueles que são utilizados nos sistemas de isolamento de base (Figura 1.5b), sendo activada nas duas direcções por intermédio de actuadores hidráulicos (Figura 1.5c), [15]. A utilização deste sistema de controlo teve como objectivo a redução da resposta dinâmica da estrutura face a ventos fortes e a sismos de intensidade pequena ou moderada, tendo-se verificado um aumento do coeficiente de amortecimento estrutural do primeiro modo de vibração de 1.4% para 10.6% , [25].



(a) Vista geral do Applause Tower



(b) Aparelho de Apoio



(c) Actuador Hidráulico

Figura 1.5: Applause Tower

1.4.3 Sistemas Semi-Activo

Este tipo de sistemas encontram-se actualmente em grande desenvolvimento visto, constituírem uma solução intermédia entre os sistemas passivos e activos, superando algumas fragilidades dos sistemas passivos, particularmente no que diz respeito à falta de adaptabilidade à dinâmica da estrutura. São ao mesmo tempo, uma solução mais económica e fiável, do que a generalidade dos sistemas activos, isto porque requerem uma pequena quantidade de energia para o seu funcionamento, podendo na maior parte dos casos, ser alimentados com pilhas ou baterias, o que os torna isentos a problemas de corte de energia eléctrica, [9].

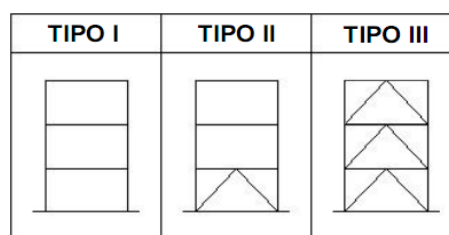
Uma aplicação bem conhecida de um sistema semi-activo, composto por diagonais de rigidez variável conhecido por Active Variable Stiffness (AVS), situa-se em Tóquio, no edifício Kajima Technical Research Institute (Figura 1.6a), de 12 metros de altura e 3 pisos, [26]. Este sistema consiste em dispositivos integrados nas diagonais da estrutura do edifício capazes de

proporcionar uma rigidez variável activa e tem como objectivo evitar fenómenos de ressonância, causadores de colapso da estrutura, [26]. Estes dispositivos são constituídos por cilindros hidráulicos regulados por válvulas que permitem comandar o bloqueio ou desbloqueio das barras, mobilizando ou desmobilizando a sua rigidez axial. Neste sistema não existe nenhum actuador, apenas um mecanismo eléctrico que bloqueia ou desbloqueia o dispositivo. Quando não existe excitação do solo, estes permanecem travados para dotar a estrutura de rigidez lateral suficiente para resistir à acção do vento. Este sistema é utilizado apenas para vibrações resultantes de sismos e usa igualmente algoritmos de controlo, necessitando apenas de uma quantidade pequena de energia externa para o seu funcionamento,[23].

Quando se recorre a este tipo de sistema, normalmente, é utilizado mais do que um dispositivo de rigidez variável. No caso do edifício referido anteriormente, existem, em cada lado da estrutura e posicionado um em cada piso, três mecanismos em forma de "V" constituídos por AVS's. Esta estrutura pode funcionar perante três situações, (Figura 1.6b). No primeiro caso, os mecanismos presentes em todos os pisos encontram-se desbloqueados, no segundo caso, apenas o mecanismo do primeiro piso está travado e, por fim, os mecanismos todos travados com a finalidade de oferecer resistência lateral ao edifício. O controlo desta estrutura é feito através de um acelerómetro posicionado no primeiro piso que recolhe informações quando sujeito a um sismo e, através de um selector de frequências, tem a capacidade de determinar qual das três situações oferece uma rigidez capaz de assegurar baixos valores de deflexões e acelerações, [23].



(a) Vista geral do edifício Kajima Research



(b) Tipos de Variação de rigidez

Figura 1.6: Kajima Research

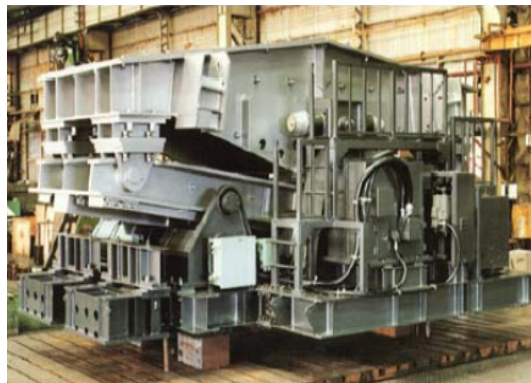
1.4.4 Sistemas Híbridos

Os sistemas híbridos são aqueles que resultam da combinação de diferentes sistemas de controlo com o objectivo de combinar os efeitos e tirar partido das vantagens associadas a cada sistema. Neste grupo, os sistemas mais conhecidos são os HMDs ("Hybrid Mass Dampers"), que resultam da combinação de TMDs com sistemas activos, com inúmeras implementações em edifícios, especialmente no Japão. Com este tipo de sistema híbrido, procura-se explorar o efeito passivo das forças de inércia dos TMDs e implementar um sistema activo paralelo de

modo a aumentar o desempenho do aparelho, quer amplificando ainda mais o movimento da massa passiva, quer aumentando a robustez do dispositivo face a problemas de sintonização. Através deste procedimento, exige-se muito menos do sistema activo do que se ele actuasse isoladamente, obtendo-se uma redução significativa do custo directo do sistema, no que diz respeito ao consumo de energia eléctrica e aos custos de manutenção. Um exemplo onde se utilizou HMDs para o controlo de vibrações, foi no edifício Shinjuku Park Tower, em Tóquio, representado na Figura 1.7a, onde se utilizaram HMDs em forma de "V" (Figura 1.7b). Estes dispositivos combinam um TMD passivo de comportamento pendular de massa 110 ton , com um sistema activo composto por um motor eléctrico de 75 kW de potência. Após a instalação de várias unidades no edifício, verificou-se que o coeficiente de amortecimento do primeiro modo de vibração aumentou de 1.1% para 4.9%, possibilitado assim uma redução da resposta estrutural em cerca de 50% presenciada durante o tufão que atingiu Tóquio em 1996, [27].



(a) Edifício Shinjuku Park Tower em Tóquio



(b) HMDs em forma de "V"

Figura 1.7: Shinjuku Park Tower

1.4.5 Aplicações de Controlo em Portugal

Os sistemas de protecção sísmica, em Portugal, começaram por ser utilizado em pontes, no final dos anos sessenta, com a substituição dos aparelhos de apoio metálicos por apoios elastoméricos. No início dos anos oitenta, começaram-se a utilizar os aparelhos elastoméricos com a finalidade de reduzir a frequência própria de vibração da estrutura, ainda sem adoptar detalhadamente o conceito de isolamento de base, que foi implementado alguns anos depois, aquando da introdução dos aparelhos elastoméricos de alto amortecimento. Na última década do século XX, houve um crescimento exponencial na aplicação de sistemas de isolamento, constituídos por apoios de borracha de alto amortecimento nomeadamente chamados HDRB (High Damping Rubber Bearing), ao que se juntou a aplicação de dissipadores de energia passivos, como os dissipadores viscosos e histeréticos, [4].

A Ponte Salgueiro Maia, em Santarém, (Figura 1.8a) e a Ponte Vasco da Gama, em Lisboa (Figura 1.8b), são dois exemplos de aplicação destes sistemas de protecção sísmica,[4].

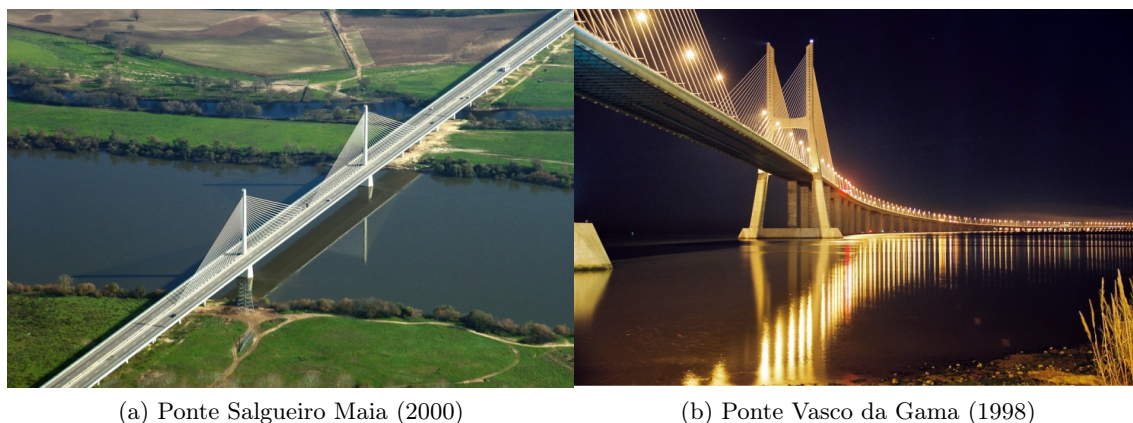


Figura 1.8: Pontes com protecção sísmica em Portugal

Ainda em Portugal, existe outro caso bastante conhecido de controlo passivo utilizado em Coimbra, na ponte pedonal Pedro e Inês, concluída em 2006, (Figura 1.9). Esta faz a travessia do rio Mondego e está localizada no centro do Parque da Cidade, tratando-se de uma estrutura metálica com tabuleiro misto constituído por aço/betão. Estudos realizados revelaram que a estrutura era particularmente sensível a vibrações induzidas por peões, quer na direcção lateral, quer na vertical. Com o propósito de melhorar o conforto dos peões e de diminuir essas vibrações foi implementado um sistema composto por 6 TMD's, e desenvolvido um programa de observação do comportamento dinâmico da ponte. Após a observação durante dois meses, mostrou-se que o comportamento da estrutura está dentro dos limites aceitáveis,[11].



Figura 1.9: Ponte Pedonal Pedro e Inês, Coimbra

A nível de controlo passivo em edifícios existe um caso recente e bem conhecido de utilização de um sistema de controlo passivo que é o Hospital da Luz situado em Lisboa, representado na Figura 1.10a. O terreno onde se encontra implantado o Hospital é atravessado por duas galerias do metropolitano, o que levou a que o sistema de protecção sísmica adoptado, neste caso, fosse redimensionado com o objectivo de isolar a base da estrutura tanto as vibrações sísmicas como também as vibrações verticais induzidas pela passagem das composições do metropolitano, [22]. Foi aplicado à estrutura um sistema de isolamento de base a partir do piso -1 , ou seja, os restantes pisos acompanham os movimentos do solo de fundação. No entanto, existem alguns elementos estruturais cujo isolamento é feito no nível -3 , como é o caso da base dos elevadores. Com base na bibliografia disponível até hoje, esta poderá ser a única estrutura no mundo com isolamento de base para acções sísmicas e acções verticais, simultaneamente, [22]. Para isolar o edifício destes dois tipos de acções, sísmicas e verticais, utilizaram-se aparelhos de apoio constituídos por blocos de borracha de alto amortecimento (HDRB) com baixa rigidez lateral, representados na Figura 1.10b. Os aparelhos de apoio foram colocados acima das fundações e necessitam de inspecção com uma periodicidade máxima de 3 anos, a fim de se garantir boas condições de funcionamento.



(a) Alçado do Hospital da Luz, Lisboa.



(b) Aparelho de Apoio (HDRB)

Figura 1.10: Hospital da Luz, Lisboa.

Capítulo 2

Modelação e Fundamentos dos Sistemas de Controlo

2.1 Introdução

Entende-se por controlador, uma interconexão de componentes projectados para manipular as entradas aplicadas a um determinado sistema de modo a que as variáveis de saída possam apresentar um desempenho desejado.

Neste capítulo é abordado o tema relativo à modelação e análise de sistemas de controlo activo, recorrendo quer a técnicas clássicas, quer a técnicas de controlo moderno. As técnicas clássicas baseiam-se no estudo de sistemas modelados como tendo uma única entrada e uma saída relacionadas por uma função de transferência. Já as técnicas de controlo moderno só mais recentemente por volta dos anos 90 começaram a ser divulgadas e implementadas, tendo para isso contribuído o desenvolvimento de ferramentas de cálculo automático verificado nas últimas décadas. Estas técnicas permitem estudar o controlo de sistemas multivariáveis, ou seja, sistemas dotados de várias entradas e várias saídas simultâneas, recorrendo-se para o efeito, a modelos baseados no conceito de Espaço de Estado. Neste trabalho, serão estudados alguns sistemas com uma só entrada, com a possibilidade de existência de várias saídas e dar-se-á mais ênfase ao controlo óptimo. Como abordagem geral, pode dizer-se que um sistema de controlo tem como objectivo modificar as características dinâmicas de uma determinada estrutura, tendo em vista melhorar o seu desempenho em serviço ou até, quando está em causa a integridade estrutural, aumentar os níveis de segurança para fazer face a um potencial colapso. De facto, através da aplicação de uma acção de controlo é possível reconfigurar as características dinâmicas iniciais da estrutura, em termos de frequências naturais e coeficientes de amortecimento, de tal forma que o sistema adquira uma nova dinâmica mais eficaz tendo em vista os objectivos do controlo. Nesse sentido, seguidamente é feita uma abordagem ao estudo e análise de sistemas de controlo, a qual fornece ferramentas importantes para a fase de concepção e dimensionamento.

2.1.1 Diagrama de Blocos

Sistemas dinâmicos são aqueles que evoluem com o tempo e são comumente referidos como plantas ou processos. A excitação é conhecida como sinal de entrada ou simplesmente entrada e a resposta como sinal de saída, ou simplesmente saída. Uma representação conveniente para a relação entre a entrada e a saída de um sistema dinâmico é representado através do diagrama de blocos, como demonstrado na Figura 2.1.

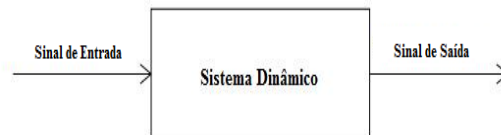


Figura 2.1: Esquema de um diagrama de bloco

O diagrama de blocos é uma representação por meio de símbolos, do fluxo de sinais e das funções desempenhadas por cada componente de um sistema de controlo. Num diagrama de blocos, as variáveis do sistema estão ligadas entre si através de blocos funcionais. O bloco é uma representação das operações que são efectuadas sobre o sinal à sua entrada. Esta representação tem como principal vantagem a simplificação da análise dos sistemas, permitindo, num único esquema, ter uma imagem geral da estrutura que ele representa. Porém, não fornece qualquer informação sobre a estrutura física do sistema.

A Figura 2.1 representa uma relação simples entrada-saída, no sentido em que a resposta é um resultado natural da excitação. Este diagrama de blocos é típico de um sistema não controlado. No entanto, em muitas aplicações, é necessário assegurar que o sistema tenha um desempenho desejado e neste caso é preciso que se faça o projecto de um sistema de controlo. Assim, em sistemas controlados o objectivo é conseguir uma resposta satisfatória através do uso de um controlador cuja saída chamada de sinal de controlo, actua como entrada para o sistema a controlar. Se o modelo matemático do sistema é conhecido completamente o projectista é capaz de saber qual é a saída que uma determinada entrada provocará no sistema, e desta forma poderá determinar a entrada ao sistema, ou sinal de controlo u , que produzirá uma saída desejada y .

2.1.2 Tipos de Malha

Existem duas formas básicas de sistemas de controlo: em malha aberta e em malha fechada.

Um sistema de controlo em malha aberta, consiste em aplicar um sinal pré-determinado à estrutura com vista a obter, ao final de determinado tempo, um determinado valor ou comportamento para a variável a ser controlada. Neste tipo de controlo não existe a preocupação

em utilizar a informação relativa ao comportamento da estrutura perante o sinal de entrada, para correcção da acção de controlo, ou seja não existe uma realimentação, também chamada como retroacção. O funcionamento de um sistema deste tipo está representado na Figura 2.2,[34].

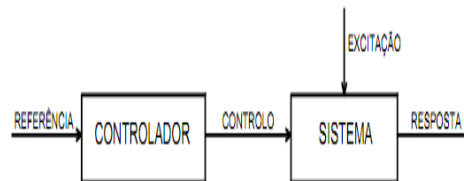


Figura 2.2: Diagrama de bloco de um sistema em malha aberta

Num sistema de controlo em malha fechada, a resposta efectiva do sistema é continuamente medida e, com base nela, a acção de controlo é constantemente corrigida com vista a atingir um objectivo inicialmente proposto. Assim, pode-se dizer que este sistema é realimentado. Este tipo de controlo é muito eficaz face à excitação e factores externos cuja estrutura está sujeita. Na Figura 2.3 pode-se ver um diagrama deste tipo,[34].

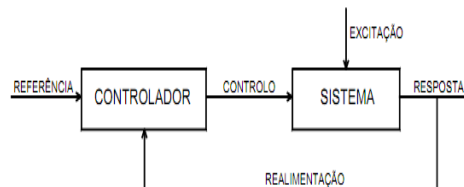


Figura 2.3: Diagrama de bloco de um sistema em malha fechada

2.1.3 Tipos de Realimentação

Quando o sistema de controlo é do tipo realimentado, o controlador baseia-se no erro, ou seja, na diferença entre a resposta efectiva e a resposta de referência, para decidir qual a correcção a introduzir no sistema. Essa correcção não é necessária apenas quando o erro é nulo, mas isto depende do tipo de controlador.

Se o controlador actua no sentido inverso da variação de saída, ou seja, no sentido da estabilização do sistema, este tipo de realimentação designa-se de negativa, e é o mais usual em

controlo de sistemas. Na Figura 2.4 pode-se ver um diagrama de bloco referente à realimentação negativa,[34].

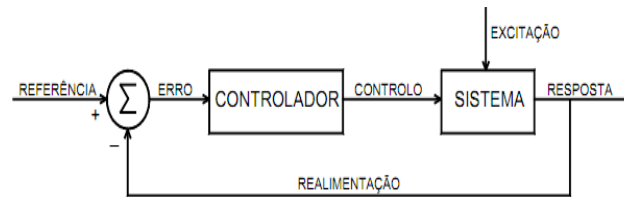


Figura 2.4: Diagrama de bloco de um sistema em malha fechada com realimentação negativa

Quando os sistemas de controlo actuam no mesmo sentido da variação da variável de saída, ou seja, aumentando as variações ou perturbações então, neste caso, estamos perante uma realimentação positiva. O esquema referente à realimentação positiva encontra-se na Figura 2.5,[34].

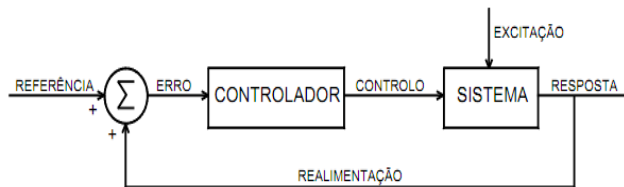


Figura 2.5: Diagrama de bloco de um sistema em malha fechada com realimentação positiva

Sistemas de controlo por realimentação têm muitas vantagens face àqueles em malha aberta: são mais estáveis, podendo inclusivamente estabilizar sistemas que são considerados, separadamente, instáveis e são capazes de compensar distúrbios inesperados e incertezas no modelo da planta, nas medições e nos actuadores. A propriedade de um sistema ser pouco sensível a variações inesperadas na dinâmica é chamada de robustez. Na verdade, esta é a principal propriedade dos sistemas de controlo por realimentação. Por outro lado, estes sistemas de controlo são mais caros que os sistemas de controlo em malha aberta, pois precisam de sensores e unidades de processamento para a implementação do controlador.

O problema fundamental no dimensionamento de um sistema de controlo consiste em determinar uma lei de controlo que permita que um sistema dinâmico se comporte da maneira pretendida, apresentando estabilidade e propriedades desejáveis de desempenho e robustez diante de incertezas.

No estudo de sistemas de controlo, precisamos ser capazes de modelar sistemas dinâmicos e de analisar características dinâmicas.

2.1.4 Função de Transferência de um sistema em Malha Fechada

O diagrama de blocos da Figura 2.6 é referente ao funcionamento de um sistema em malha fechada. O sistema a controlar é definido pela função de transferência $G_e(s)$ e o controlador pela função de transferência $G_c(s)$. O sinal de controlo gerado $U(s)$ funciona como entrada no sistema o qual responde com a saída $Y(s)$. Situada no ciclo de realimentação, $H(s)$ é a função de transferência do sensor que permite converter o sinal de saída, que é normalmente uma grandeza física, na grandeza da variável de saída. Deste modo, a saída do sistema pode ser comparada com a referência $R(s)$, que representa o objectivo do controlo em termos da resposta desejada, dando origem à variável erro $E(s)$ também conhecida como erro actuante,[34].

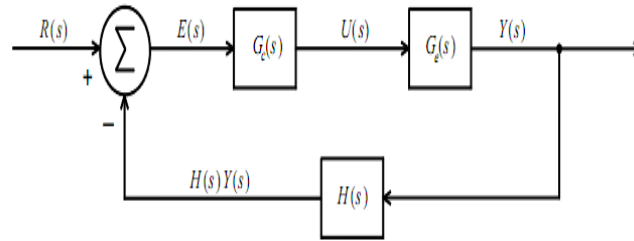


Figura 2.6: Funções de Transferência de um sistema de Malha Fechada

O diagrama anterior pode ser simplificado através da substituição das funções de transferência $G_c(s)$ e $G_e(s)$ ligadas em série, pela função equivalente respectiva. Neste caso pode constatar-se que:

$$U(s) = E(s)G_c(s)$$

e

$$Y(s) = U(s)G_e(s)$$

Agora, eliminando $U(s)$, obtém-se:

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = G_c(s)G_e(s) = G(s)$$

Sendo esta a função global do sistema, pode ser representada pelo seguinte diagrama de blocos indicado na Figura 2.7.

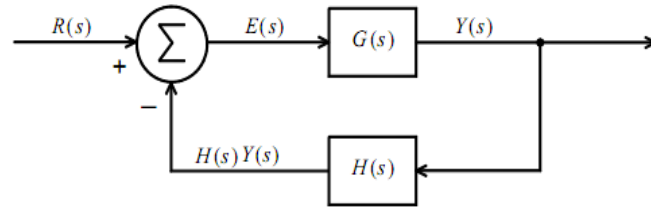


Figura 2.7: Função de transferência equivalente de um sistema de malha fechada

Da análise deste último diagrama, pode observar-se que a saída do sistema e a variável erro são dadas por:

$$Y(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s)$$

Agora, eliminando o erro $E(s)$ das equações anteriores e explicitando em ordem a $Y(s)$, tem se:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

A função anterior é a função de transferência de um sistema em malha fechada, a qual relaciona a resposta medida do sistema com a resposta de referência, admitindo a ausência de perturbações exteriores. O produto $G(s)H(s)$ corresponde à função de transferência em malha aberta, pois, não existindo realimentação no ciclo de controlo, a resposta do sistema medida pelo sensor é obtida pela actuação do controlador não realimentado sobre a estrutura. A função de transferência em malha fechada considerando a aplicação de perturbações exteriores poderia ser igualmente deduzida somando algebricamente a acção de controlo à acção exterior.

As operações de integração e derivação podem ser representadas por diagramas de blocos. Assim, para o controlador integral, o sinal de entrada que é dado ao sistema, através do controlador, é proporcional ao integral do erro passado ao longo do tempo, sendo este dado por:

$$u(t) = K_i \int_0^t e(t) dt$$

A função de transferência deste controlador obtém-se aplicando a Transformada de Laplace, obtendo-se:

$$U(s) = K_i \frac{1}{s} E(s)$$

Assim tem-se:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_i \frac{1}{s}$$

A utilização deste controlo integral tem como principal função anular o erro em regime permanente. Contudo, se a acção de um controlador integral for aplicada isoladamente, tende a piorar a estabilidade relativa do sistema. Como tal, o controlo do tipo integral é frequentemente combinado com o controlo proporcional e derivativo.

O diagrama de blocos de um controlador integral pode ser representando, como demonstrado na Figura 2.8:

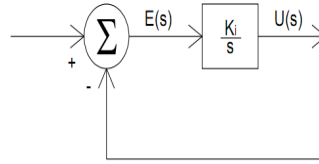


Figura 2.8: Diagrama de bloco para um controlador do tipo integral

Agora para o controlo derivativo tem-se que:

$$u(t) = K_d \dot{e}(t)$$

ou seja, o sinal de entrada ao sistema é proporcional à derivada do erro.

Em termos da Transformada de Laplace, a expressão adquire o seguinte aspecto

$$U(s) = K_d s E(s)$$

Assim tem-se:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_d s$$

O diagrama de blocos de um controlador integral pode ser representando, como demonstrado na Figura 2.9:

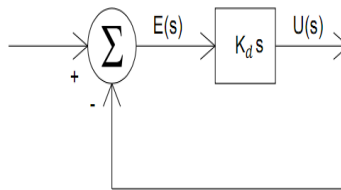


Figura 2.9: Diagrama de bloco para um controlador do tipo derivativo

2.1.5 Espaço de Estados de um sistema de Malha Fechada

Para a representação de espaço de estados através de diagramas de blocos é necessário considerar sob a forma matricial o seguinte sistema dinâmico:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Neste caso as variáveis e as operações envolvidas estão no domínio do tempo, e os sistemas a controlar têm múltiplas entradas e múltiplas saídas. Na Figura 2.10 está representado o diagrama de blocos em questão. Neste diagrama de blocos as setas representam os fluxos de sinais, o $x(t)$ o vector de estado, o $u(t)$ a entrada e $y(t)$ a saída. Os ganhos dos blocos são iguais às matrizes de estado, A , entrada, B , saída, C e de transmissão directa, D .

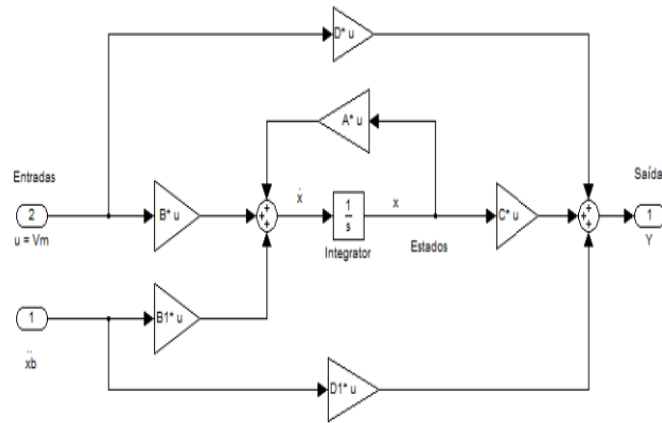


Figura 2.10: Diagrama de blocos em espaço de estados de um sistema de malha fechada

De seguida através do diagrama de blocos da Figura ?? pode-se ver que o controlo em malha-fechada pode ser realizado através da realimentação de estados, isto se as variáveis de estado possam ser medíveis ou estimáveis. Neste caso pode-se ver que existe retroacção negativa, por isso é que aparece o sinal de menos no ganho do controlador K .

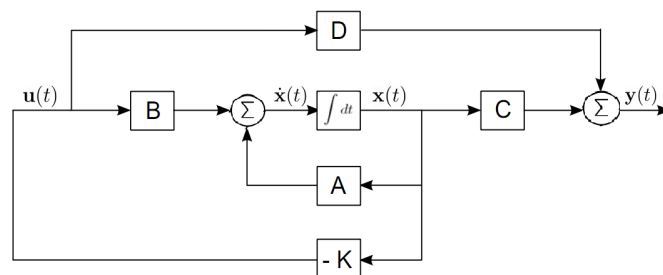


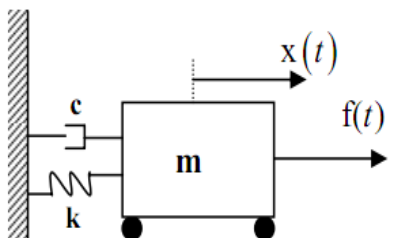
Figura 2.11: Diagrama de blocos de um sistema controlado via realimentação de estados

Capítulo 3

Modelação e Fundamentos de Sistemas Dinâmicos

3.1 Modelação de Sistemas Dinâmicos

Para estudar o comportamento dinâmico de uma estrutura é necessário recorrer à modelação matemática, que reproduz a dinâmica do sistema com a maior exactidão possível. Na obtenção de um modelo matemático razoavelmente simplificado, é normalmente necessário ignorar certas propriedades físicas inerentes ao sistema. Em particular, quando se deseja obter um modelo matemático linear a parâmetros concentrados, isto é, um modelo que empregue equações diferenciais ordinárias será sempre necessário ignorar certas não-linearidades. Dessa forma, a dinâmica dos sistemas, sejam eles mecânicos, eléctricos, térmicos, biológicos ou económicos, podem ser descritos em termos de equações diferenciais. Tais equações diferenciais podem ser obtidas utilizando as leis da física que governam o sistema, como por exemplo, as equações de Newton para sistemas mecânicos. A Figura 3.1 mostra, de forma esquemática, a modelação de um sistema mecânico de um grau de liberdade, bem como a correspondente equação matemática,[36].



$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

Figura 3.1: Modelação de um sistema mecânico

Quando o modelo de um sistema mecânico respeita as propriedades de aditividade e de homogeneidade, diz-se que este sistema é linear. Embora na realidade todo o sistema seja não linear, é razoável assumir modelos lineares por vários motivos. O principal deles é que existe uma vasta gama de ferramentas de projecto para sistemas lineares. Dentro de certas regiões, um sistema dinâmico pode ter um comportamento puramente linear, ou as não linearidades podem ser aproximadas por um sistema linear. As propriedades de aditividade e homogeneidade são descritas da seguinte maneira:

1. Um sistema com entrada u e saída y , tem a propriedade de aditividade se,

$$T\{u_1\} = y_1$$

e

$$T\{u_2\} = y_2$$

tem se que:

$$T\{u_1 + u_2\} = y_1 + y_2$$

2. Um sistema com entrada u e saída y , tem a propriedade de homogeneidade se,

$$T\{\alpha u\} = \alpha y$$

$\forall \alpha$ constante, $\alpha \in \mathbb{R}$

Quando um sistema não respeita alguma das propriedades anteriores, ele é dito como não linear.

Para sistemas lineares existem duas abordagens para a modelação, tanto através da função de transferência ou abordagem no domínio da frequência, como através das equações de estado ou abordagem no domínio do tempo. O primeiro método é conhecido como controlo clássico e usa a transformada de Laplace, para evitar a resolução das equações diferenciais do sistema, transformando-as em equações algébricas. Esta abordagem apresenta uma grande limitação, isto porque somente pode ser usada para representar sistemas lineares e invariantes no tempo (LTI – Linear Time Invariant). O segundo método é conhecido como controlo moderno e, representa o sistema dinâmico com um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Esta última abordagem já pode ser usada para representar sistemas lineares ou não lineares, variantes ou invariantes no tempo, [36].

3.1.1 Modelação no Domínio da Frequência

A resposta no domínio da frequência está associada à caracterização da resposta estacionária de um sistema na presença de excitações harmónicas. Em sistemas lineares, se a solicitação exterior for constituída por uma acção sinusoidal, a resposta do sistema será igualmente sinusoidal com a mesma frequência, mas, usualmente, de amplitude e fase diferentes. De facto, utilizando a função de transferência do sistema, é possível conhecer para cada frequência de excitação a relação existente entre a amplitude da resposta e a amplitude da acção, bem como a diferença de fase da sinusóide de resposta relativamente à sinusóide que caracteriza a perturbação exterior. Assim, os métodos de representação da resposta do sistema no domínio da frequência baseiam-se na representação gráfica da variação destas duas grandezas relativamente à frequência de excitação aplicada. Em geral, pode recorrer-se a diferentes métodos para a representação desta função, conhecida como Função de Resposta em Frequência (FRF), sendo os mais conhecidos e usados, o diagrama de Bode, o diagrama de Nyquist e o diagrama de Nichols. Esta representação gráfica apresenta algumas vantagens relativamente aos métodos utilizados no domínio do tempo, isto porque, através deles é possível caracterizar experimentalmente a Função de Resposta em Frequência (FRF) de um sistema e naturalmente construir a função de transferência que lhe está associada,[11].

3.1.1.1 Determinação da função da resposta em frequência

A função de resposta em frequência (FRF) é, por definição, uma função que traduz a componente estacionária da resposta de um sistema quando sujeito a uma excitação harmónica. Embora ela possa ser obtida através da Transformada de Fourier, sendo esta até mais utilizada na análise de muitos problemas relacionados com sistemas mecânicos, com particular ênfase para as estruturas de Engenharia Civil, esta função pode igualmente ser deduzida a partir da aplicação da Transformada de Laplace. A Transformada de Fourier não é nada mais que particularização da Transformada de Laplace ao eixo imaginário $s = j\omega$, [8], sendo ω a variável que caracteriza a frequência de excitação. Para mostrar como se pode obter a FRF a partir da Transformada de Laplace, comece-se por recordar que um número complexo pode ser representado na forma cartesiana $A + jB$, na forma polar $M\angle\theta$, onde $M = \sqrt{A^2 + B^2}$ e $\theta = \arctan \frac{B}{A}$, e na forma exponencial $Me^{j\theta}$.

Considere-se agora um sistema $G(s)$ excitado com um sinal sinusoidal $u(t)$ de frequência ω e amplitude U_0 . Se os n pólos p_i de $G(s)$ forem todos estáveis e diferentes entre si, a saída $Y(s) = G(s)U(s)$ admite a expansão em fracções simples

$$Y(s) = \frac{r_1}{s - p_1} + \frac{r_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{r_n}{s - p_n} + \frac{r_0}{s - j\omega} + \frac{r_0^*}{s - j\omega}$$

onde r_i são os resíduos e r_0^* é o conjugado de r_0 . Se aplicarmos a Transformação de Laplace inversa, à expressão anterior obtém-se:

$$y(t) = r_1 e^{p_1 t} + r_2 e^{p_2 t} \dots + r_n e^{p_n t} + 2|r_0| \text{sen}(\omega t + \phi)$$

onde $2|r_0| \text{sen}(\omega t + \phi)$ dá-nos o regime permanente (y_p).

Usando a Transformação de Laplace tem-se que:

$$\begin{aligned} Y_p(s) &= \frac{r_0}{s - j\omega} + \frac{r_0^*}{s - j\omega} = \frac{r_0(s - j\omega) + r_0^*(s + j\omega)}{s^2 + \omega^2} = \\ &= \frac{(r_0 + r_0^*)s + (-jr_0 + jr_0^*)\omega}{s^2 + \omega^2} = 2 \frac{\text{Re}(r_0)s + \text{Im}(r_0)\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

onde $\text{Re}(r_0)$ e $\text{Im}(r_0)$ representam as componente real e imaginária de r_0 .

De seguida procede-se ao cálculo do resíduos r_0 e r_0^* complexo conjugados, realizado através das seguintes expressões:

$$r_0 = \lim_{s \rightarrow -j\omega} (s + j\omega)Y(s) = -\frac{U_0}{2j} \lim_{s \rightarrow -j\omega} G(s) = -\frac{U_0}{2j} G(-j\omega)$$

$$r_0^* = \lim_{s \rightarrow j\omega} (s - j\omega)Y(s) = \frac{U_0}{2j} \lim_{s \rightarrow j\omega} G(s) = \frac{U_0}{2j} G(j\omega)$$

Substituindo na expressão $Y_p(s)$, vem que:

$$Y_p(s) = U_0 \frac{\text{Im}(G(j\omega))s + \text{Re}(G(j\omega))\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Usando a Transformação de Laplace inversa, tem-se:

$$y_p(t) = U_0 |G(j\omega)| \text{sen}(\omega t + \arg\{G(j\omega)\})$$

Assim pode dizer-se que, se um sistema linear invariante no tempo, estável, descrito pela sua função de transferência $G(s)$ for excitado por um sinal sinusoidal do tipo $u(t) = U_0 \text{sen}(\omega t) \varepsilon(t)$, o sistema responde segundo a seguinte expressão:

$$y_p(t) = U_0 M_G(\omega) \text{sen}(\omega t + \phi_G(\omega))$$

Sendo o ganho de amplitude dado por:

$$M_G(\omega) = |G(j\omega)|$$

E o desvio de fase dado por:

$$\phi_G(\omega) = \arg\{G(j\omega)\}$$

A parte complexa $G(j\omega)$ é chamada por Função de Resposta em Frequência.

Assim, sendo uma função complexa, é possível representar $G(j\omega)$ através de gráficos de algumas formas, como por exemplo:

- Representação directa de $G(j\omega)$ num plano complexo para todos os valores possíveis da frequência ω . Esta forma de representação chama-se diagrama polar e é a base para o traçado do diagrama de Nyquist.
- Representação num diagrama cartesiano de $M_G(\omega)$ e $\phi_G(\omega)$ para todos os valores possíveis da frequência ω . Esta forma de representação chama-se diagrama de Nichols.
- Representação em separado de $M_G(\omega)$ e $\phi_G(\omega)$ em função da frequência ω . Esta forma de representação chama-se diagrama de Bode.

De seguida serão apenas explicadas as representações gráficas usadas neste trabalho, nomeadamente o Diagrama de Bode.

3.1.1.2 Diagrama de Bode

Uma das formas de representar graficamente a função de resposta em frequência de um sistema consiste em recorrer ao diagrama de Bode, o qual é composto por dois gráficos separados. Num deles representa-se a amplitude da FRF, usualmente expressa numa escala logarítmica em decibéis, em função da variável ω que traduz a frequência de excitação, expressa numa escala logarítmica simples. No outro representa-se o ângulo de fase medido relativamente à função de excitação. Neste caso, o ângulo é representado numa escala linear e a frequência numa escala logarítmica simples. A escala logarítmica usualmente adoptada no gráfico das amplitudes utiliza a unidade decibel (dB), a qual, tomando como referência a unidade, é definida de acordo com $G = 20 \log|G(j\omega)|$. Na Figura 3.2 está representado um exemplo de um diagrama de Bode, bem como a sua magnitude, ângulo fase e a sua frequência de excitação,[11].

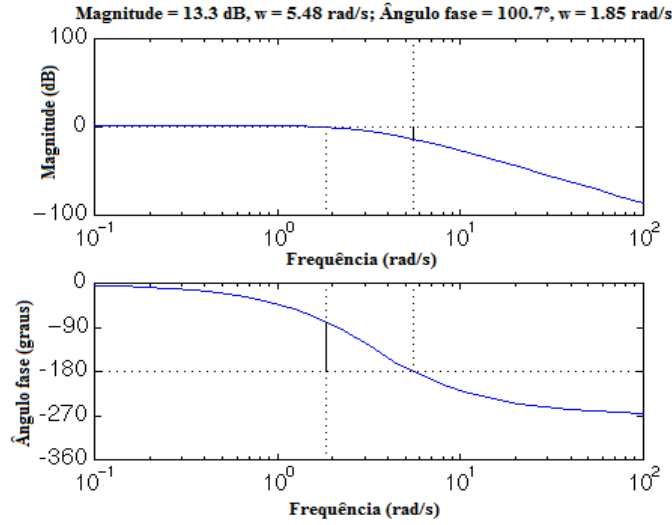


Figura 3.2: Exemplo de um Diagrama de Bode

3.1.2 Modelação no Domínio do Tempo

A representação de sistemas dinâmicos em espaço de estado tem como principal objectivo reescrever o sistema de equações do movimento inicial num sistema com um maior número de equações mas de grau inferior, demonstrado pela seguinte expressão:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = f(t) \xrightarrow{FT} EE$$

Esta operação é computacionalmente desejável, pois, apesar do número de equações ser superior, têm um tratamento muito mais fácil. A representação em espaço de estado tem grande importância em diversos domínios, em particular, na engenharia do controlo moderno de sistemas, devido ao facto de esta abordagem permitir tratar problemas de elevada complexidade, como por exemplo sistemas multivariáveis (várias entradas e saídas) e sistemas não-lineares.

Este tipo de representação envolve as seguintes variáveis: estado, variáveis de estado, vector de estado e espaço de estado.

O estado de um sistema dinâmico é definido pelos valores do menor conjunto de variáveis que, em conjunto com as entradas do sistema determina completamente o comportamento do sistema.

As variáveis de estado de um sistema dinâmico são as grandezas cujos valores determinam o estado do sistema. Se forem necessárias pelo menos n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n para descrever completamente o comportamento de um sistema dinâmico, então tais n variáveis são um conjunto de variáveis de estado. Se n variáveis são necessárias para descrever completamente o comportamento de um dado sistema, então estas n variáveis de estado podem ser consideradas n componentes de um vector x , sendo esse vector de estado.

O espaço n -dimensional cujos eixos coordenados consistem nos eixos x_1, x_2, \dots, x_n é chamado de espaço de estados. Qualquer estado pode ser representado por um ponto no espaço de estados.

3.2 Equações do Movimento

As equações dinâmicas do modelo são obtidas através do método de Lagrange. O Lagrangeano, L , do sistema é calculado através da energia potencial, V e cinética total, T em função das coordenadas generalizadas. Este método pode ser aplicado sempre que o sistema seja conservativo e baseia-se no princípio de Hamilton,[39].

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt = 0 \quad (3.1)$$

O Lagrangeano de um sistema, é definido como,

$$L = T - V \quad (3.2)$$

assim substituindo na equação anterior obtém-se:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (3.3)$$

Segundo o princípio de Hamilton, o comportamento dinâmico de um sistema será consistente com as limitações do mesmo. Através das coordenadas generalizadas torna-se o campo de deslocamentos de uma estrutura cinematicamente admissível, usando um número mínimo de coordenadas independentes. Logo qualquer posição do sistema pode ser descrita como uma função das N coordenadas generalizadas,[39].

$$T(q_k; \dot{q}_k; t); V(q_k; \dot{q}_k; t); L(q_k; \dot{q}_k; t)$$

Tendo em consideração as correspondentes condições estacionárias de Euler, obtém-se a equação de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = Q_k^{nc} \quad (3.4)$$

Sendo Q_k^{nc} a resultante das forças não conservativas aplicadas segundo a coordenada generalizada q_k .

3.3 Descrição do modelo de laboratório

O sistema AMD é um modelo à escala reduzida de um edifício de dois pisos controlado com amortecedor de massa activo,[12],[13]e[14]. Neste trabalho modelou-se o comportamento do mesmo e estudaram-se várias soluções de controlo activo.

Os equipamentos utilizados para a realização do controlo activo de vibração consistiram em:

Estrutura: representada por um modelo de um edifício flexível controlado por uma massa activa móvel. Este modelo é caracterizado por uma armação de aço com uma massa controlável localizada no topo. O modelo do Active Mass Damper—Two-Floor (AMD-2), os equipamentos e características que foram utilizados são mostrados na Figura 3.3 e na Tabela 3.1.

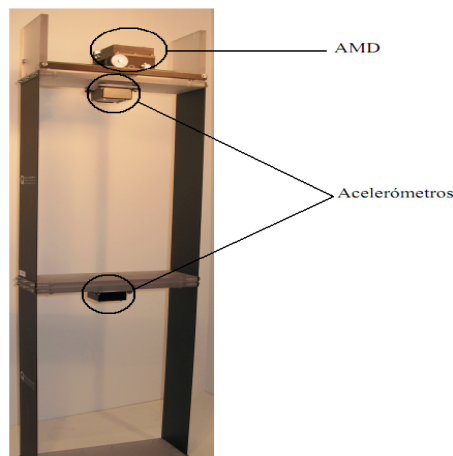


Figura 3.3: Modelo de AMD e os seus equipamentos

Tabela 3.1: Características da estrutura

Descrição	Valor / Unidade
Altura entre andares	502 <i>mm</i>
Secção de cada coluna de aço	1.75×108.1 <i>mm</i>
Massa da Secção de cada coluna de aço	0.240 <i>kg</i>
Massa do primeiro piso	1.160 <i>kg</i>
Massa do segundo piso	1.380 <i>kg</i>

Amortecedor de Massa Activo (Active Mass Damper -AMD): Fornece a força de controlo para a estrutura. Este sistema é constituído por um carro equipado com um motor DC que se movimenta ao longo de um trilho por um mecanismo de pinhão como demonstrado na Figura 3.4. O máximo percurso do carro é de ± 80 *mm* sendo a massa total do AMD de 18.75% da estrutura, ou seja 0.65 *kg*.

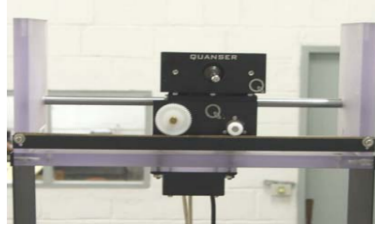


Figura 3.4: Active Mass Dumper(AMD)

3.3.1 Equação do movimento da estrutura com AMD a uma solicitação de base

Neste caso, o sistema é considerado com três graus de liberdade, sendo $x_c(t)$, $x_{f1}(t)$ e $x_{f2}(t)$ as coordenadas generalizadas em valores relativos. A força de controlo aplicada, $F_c(t)$, e a aceleração da mesa de excitação, $\ddot{x}_b(t)$, são as entradas do sistema.

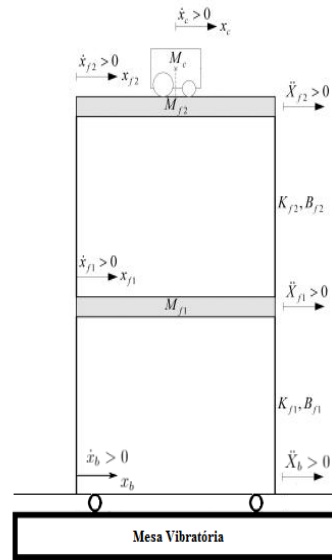


Figura 3.5: Representação do modelo com aceleração de base

O comportamento do modelo de edifício pode ser idealizado como uma associação de vários elementos ligados por nós, que representam as vigas, pilares e lajes. Os deslocamentos dos nós são denominados por graus de liberdade, podendo uma estrutura como um edifício conter infinitos graus de liberdade. Assim, como forma a limitar esses graus de liberdade recorre-se à modelação computacional. Nesse caso o modelo será considerado como um modelo “shear frame” segundo a qual as deformações axiais dos pilares e das vigas são desprezados, os pisos são rígidos e cada piso apresenta um grau de liberdade.

A representação definida na Figura 3.5 é utilizada como referência para obter as equações de energia. A energia potencial está associada somente aos deslocamentos horizontais dos pisos,

visto que se admitem pequenas oscilações angulares da estrutura e consideram-se nulos os coeficientes de amortecimento B_{f1} e B_{f2} .

A rigidez lateral de ambos os pisos é modelada por molas de rigidezes K_{f1} e K_{f2} , respectivamente. Assim a energia potencial total é dada pela energia potencial elástica das molas.

$$V_T = \frac{1}{2}K_{f1}x_{f1}^2(t) + \frac{1}{2}K_{f2}x_{f2}^2(t) \quad (3.5)$$

A energia cinética pode ser dividida em duas parcelas, uma de translação e outra de rotação. A parcela de translação depende das massas M_c , M_{f1} , M_{f2} e das respectivas velocidades absolutas, em relação ao seu centro de gravidade. A energia de rotação do motor depende da velocidade do AMD e da sua inércia de rotação.

A energia cinética de translação do carro é demonstrada pela equação seguinte:

$$T_{tc} = \frac{1}{2}M_c(\dot{x}_c(t) + \dot{x}_{f1}(t) + \dot{x}_{f2}(t) + \dot{x}_b(t))^2 \quad (3.6)$$

A energia cinética rotacional do carro é dada por:

$$T_{rc} = \frac{1}{2} \frac{J_m K_g^2 \dot{x}_c^2(t)}{r_{mp}^2} \quad (3.7)$$

A energia cinética de translação do primeiro e do segundo andar é a seguinte:

$$T_{tf1} = \frac{1}{2}M_{f1}(\dot{x}_{f1}(t) + \dot{x}_b(t))^2 \quad (3.8)$$

$$T_{tf2} = \frac{1}{2}M_{f2}(\dot{x}_{f1}(t) + \dot{x}_{f2}(t) + \dot{x}_b(t))^2 \quad (3.9)$$

Assim, a energia cinética total do sistema T_T é dada por:

$$T_T = T_{tc} + T_{rc} + T_{f1} + T_{f2} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} T_T = & \frac{1}{2}M_c(\dot{x}_c(t) + \dot{x}_{f1}(t) + \dot{x}_{f2}(t) + \dot{x}_b(t))^2 + \frac{1}{2} \frac{J_m K_g^2 \dot{x}_c^2(t)}{r_{mp}^2} + \\ & + \frac{1}{2}M_{f1}(\dot{x}_{f1}(t) + \dot{x}_b(t))^2 + \frac{1}{2}M_{f2}(\dot{x}_{f1}(t) + \dot{x}_{f2}(t) + \dot{x}_b(t))^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como se pode observar pela equação (3.11), a energia cinética é expressa em função das primeiras derivadas das coordenadas generalizadas \dot{x}_c , \dot{x}_{f1} e \dot{x}_{f2} . Para obter as equações que regem o movimento da estrutura aplica-se a equação (3.4) a cada coordenada generalizada.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_c} \right) = Q_{xc}^{nc} \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{f1}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_{f1}} \right) = Q_{xf1}^{nc} \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{f2}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_{f2}} \right) = Q_{xf2}^{nc} \quad (3.14)$$

Onde Q_{xc}^{nc} é a força generalizada aplicada na coordenada generalizada x_c , Q_{xf1}^{nc} é a força generalizada aplicada na coordenada generalizada x_{f1} , e Q_{xf2}^{nc} é a força generalizada aplicada na coordenada generalizada x_{f2} . Para este sistema, as forças generalizadas são dadas por:

$$Q_{xc}^{nc}(t) = F_c(t) - B_{eq}\dot{x}_c(t) \quad (3.15)$$

$$Q_{xf1}^{nc}(t) = Q_{xf2}^{nc}(t) = 0 \quad (3.16)$$

Onde o valor de B_{eq} corresponde ao coeficiente de amortecimento viscoso equivalente verificado no pinhão do motor e $F_c(t)$ equivale à força de controlo fornecida em[14], e V_m é a diferença de potencial a aplicar ao motor do AMD.

$$F_c(t) = -\frac{K_g^2 K_t K_m}{R_m r_{mp}^2} \dot{x}_c(t) + \frac{K_g K_t}{R_m r_{mp}} V_m(t)$$

As equações do movimento resultam pela substituição das equações (3.12), (3.13) e (3.14).

$$\begin{aligned} & \frac{(M_c r_{mp}^2 + J_m K_g^2)}{r_{mp}^2} \ddot{x}_c(t) + M_c (\ddot{x}_{f1}(t) + \ddot{x}_{f2}(t)) + \left(B_{eq} + \frac{K_g^2 K_t K_m}{R_m r_{mp}^2} \right) \dot{x}_c(t) = \\ & = \frac{K_g K_t}{R_m r_{mp}} V_m(t) - M_c(t) \ddot{x}_c(t) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$K_{f1} x_{f1}(t) + M_c \ddot{x}_c(t) + (M_c + M_{f1} + M_{f2}) \ddot{x}_{f1}(t) + (M_c + M_{f2}) \ddot{x}_{f2}(t) = -(M_c + M_{f1} + M_{f2}) \ddot{x}_b(t) \quad (3.18)$$

$$K_{f2} x_{f2}(t) + M_c \ddot{x}_c(t) + (M_c + M_{f2}) \ddot{x}_{f1}(t) + (M_c + M_{f2}) \ddot{x}_{f2}(t) = -(M_c + M_{f2}) \ddot{x}_b(t) \quad (3.19)$$

Através das equações (3.17), (3.18) e (3.19) podem ser apresentadas numa única equação matricial da seguinte forma:

$$\ddot{q}(t) = -M_s^{-1} K_s q(t) - M_s^{-1} C_s \dot{q}(t) - M_s^{-1} J_s V_m(t) + M_s^{-1} J_{sismo} \ddot{x}_b(t) \quad (3.20)$$

onde C_s é a matriz de amortecimento do sistema, M_s é a matriz massa, K_s a matriz de rigidez, o J_s é o vector que multiplica ao V_m por forma a reduzir as vibrações e J_{sismo} o vector que multiplica à aceleração de base, sendo essas matrizes dadas por:

$$M_s = \begin{bmatrix} a & M_c & M_c \\ M_c & M_c + M_{f1} + M_{f2} & M_c + M_{f2} \\ M_c & M_c + M_{f2} & M_c + M_{f2} \end{bmatrix} \quad C_s = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{f1} & 0 \\ 0 & 0 & K_{f2} \end{bmatrix} \quad J_s = \begin{bmatrix} \frac{K_g K_t}{R_m r_{mp}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{sismo} = \begin{bmatrix} -M_c & -(M_c + M_{f1} + M_{f2}) & -(M_c + M_{f2}) \end{bmatrix}^T$$

As constantes a e b são as seguintes:

$$a = \frac{(M_c r_{mp}^2 + J_m K_g^2)}{r_{mp}^2} \quad b = \left(B_{eq} + \frac{K_g^2 K_t K_m}{R_m r_{mp}^2} \right)$$

3.4 Espaço de Estados

Para a representação no Espaço de Estado de um sistema com n variáveis de estado, r variáveis de entrada e p variáveis de saída, é assim descrita através das seguintes equações,

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{cases} \quad (3.21)$$

As equações que caracterizam a saída do sistema são as seguintes,

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ y_p(t) = g_p(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{cases} \quad (3.22)$$

No caso geral, f_1, \dots, f_n e g_1, \dots, g_p são não-lineares, envolvendo explicitamente a variável tempo (sistemas variáveis no tempo). Os sistemas de equações (3.21) e (3.22) podem ser representados de uma forma mais compacta pelas seguintes expressões:

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad (3.23)$$

$$y(t) = g(x, u, t) \quad (3.24)$$

sendo

$$x(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix}; y(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{Bmatrix}; u(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{Bmatrix}$$

$$f(x, u, t) = \begin{Bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \end{Bmatrix}$$

$$g(x, u, t) = \begin{Bmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_p(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_r; t) \end{Bmatrix}$$

Sendo as equações de estado e de saída lineares, então estas podem ser simplificadas e apresentadas da seguinte forma,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_{sismo}\ddot{x}_b(t) \quad (3.25)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + D_{sismo}\ddot{x}_b(t) \quad (3.26)$$

Sendo $A[n \times n]$, $B[n \times r]$, $B_{sismo}[n \times r]$, $C[m \times n]$, $D[m \times r]$ e $D_{sismo}[m \times r]$ matrizes de coeficientes constantes, designadas por matriz de estado, matrizes de entrada, matriz de saída, e matrizes de transmissão directa, apresentam-se da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} \quad B_{sismo} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{pr} \end{bmatrix} \quad D_{sismo} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{pr} \end{bmatrix}$$

3.4.1 Representação do sistema com AMD activo

Neste caso, o sistema é linear de sexta ordem, assim, o comportamento da estrutura pode ser determinado através das posições x_c , x_{f1} e x_{f2} e das velocidades \dot{x}_c , \dot{x}_{f1} e \dot{x}_{f2} . O comportamento da estrutura pode ser determinado através do seguinte vector de estado $x(t)$:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_c(t) & x_{f1}(t) & x_{f2}(t) & \dot{x}_c(t) & \dot{x}_{f1}(t) & \dot{x}_{f2}(t) \end{bmatrix}^T$$

O vector de saída $y(t)$, é constituído pelas variáveis medidas pelos sensores instalados na estrutura.

$$y(t) = \begin{bmatrix} x_c(t) & \ddot{x}_{f1}(t) & \ddot{x}_{f2}(t) \end{bmatrix}^T$$

Com AMD activo e sem aceleração de base apenas existe uma única entrada do sistema que é a diferença de potencial a aplicar ao motor do AMD, sendo essa dada por:

$$u(t) = V_m(t)$$

A partir da equação (3.20) e considerando I como a matriz identidade, é possível representar o movimento da estrutura em relação às variáveis $\ddot{x}_c, \ddot{x}_{f1}$ e \ddot{x}_{f2} tendo assim a equação de estado da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_s^{-1}K_s & -M_s^{-1}C_s \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ M_s^{-1}J_s \end{bmatrix} u(t) \quad (3.27)$$

Agora substituindo as grandezas abrangidas nas equações do movimento pelos seus respectivos valores, dispostos estes no Apêndice A, obtêm-se a matriz A e B .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 278.43 & -18.65 & 0 & 0 \\ 0 & -431.03 & 431.03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 431.03 & -766.49 & 5.98 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.00 \\ 0 \\ -0.96 \end{bmatrix}$$

Como o vector de saída é composto pelas variáveis $x_c(t), \ddot{x}_{f1}$ e \ddot{x}_{f2} , os valores da matriz de saída C e da matriz de transmissão directa D são:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -431.03 & 431.03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 431.03 & -766.49 & 5.98 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.96 \end{bmatrix}$$

3.4.2 Representação do sistema com AMD passivo

Neste caso, o comportamento da estrutura apresenta o mesmo vector de estado $x(t)$ e o mesmo vector de saída $y(t)$ do representado para o sistema com AMD activo, neste caso como o sistema de controlo é do tipo passivo não existe diferença de potencial aplicada no motor do AMD. A partir da equação (3.20) e fazendo as simplificações necessárias para este caso é possível representar o movimento da estrutura da seguinte maneira:

$$\ddot{q}(t) = -M_s^{-1}K_s q(t) - M_s^{-1}C_s \dot{q}(t) \quad (3.28)$$

Através da equação 3.28 completa-se a matriz de estado, resultando:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_s^{-1}K_s & -M_s^{-1}C_s \end{bmatrix} x(t)$$

3.4.3 Representação do sistema com AMD fixo

Para o caso com o AMD fixo no topo do segundo piso, tem-se um sistema linear de quarta ordem que pode ser determinado através das posições x_{f1} e x_{f2} e das velocidades \dot{x}_{f1} e \dot{x}_{f2} , com a excepção da massa do segundo piso M_{f2} que é dada pela soma da massa do segundo piso mais a massa total do AMD. A representação do sistema em espaço de estados apenas necessita da matriz de estado A e da matriz de saída C , sendo a matriz de entrada B e a transmissão directa D nulas, isto porque o sistema apresenta movimento livre. Assim toma a seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Onde o vector de estado $x(t)$ é dado por:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_{f1}(t) & x_{f2}(t) & \dot{x}_{f1}(t) & \dot{x}_{f2}(t) \end{bmatrix}^T$$

E o vector de saída $y(t)$ é dado por:

$$y(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{f1}(t) & \ddot{x}_{f2}(t) \end{bmatrix}^T$$

Segundo a equação (3.20), e fazendo as simplificações necessárias para esta situação, é possível representar o movimento da estrutura em relação às variáveis \ddot{x}_{f1} e \ddot{x}_{f2} da seguinte maneira:

$$\ddot{q}(t) = -M_s^{-1}K_s q(t) \quad (3.29)$$

Através da equação (3.29) a matriz de estado A , é preenchida da seguinte maneira:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_s^{-1}K_s & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Agora substituindo as grandezas abrangidas nas equações do movimento pelos seus respectivos valores, dispostos no Apêndice B, obtêm-se a matriz de estado A e a matriz de saída C .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -431.03 & 431.03 & 0 & 0 \\ 431.03 & -677.34 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -431.03 & 431.03 & 0 & 0 \\ 431.03 & -677.34 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.5 Funções de Transferência

Em teoria de controlo, Funções de Transferência são utilizadas para caracterizar as relações de entrada-saída de componentes ou sistemas que podem ser descritos por equações diferenciais, e são expressas através da relação entre a Transformada de Laplace da equação de saída e a Transformada de Laplace da equação de entrada, admitindo nulas as condições iniciais, obtém-se:

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots a_{n-1} s + a_n)Y(s) = (b_0 s^r + b_1 s^{r-1} + \dots b_r)U(s)$$

ou seja

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(b_0 s^r + b_1 s^{r-1} + \dots b_r)}{(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots a_{n-1} s + a_n)} \quad (3.30)$$

$G(s)$ relaciona, no domínio de Laplace, a função de entrada com a função de saída do sistema, sendo designada por função de transferência. Como se pode constatar, a definição desta função depende apenas das constantes a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) e b_j ($j = 1, 2, \dots, r$), ou seja, a função de transferência depende exclusivamente das características mecânicas e materiais do sistema, que no caso de sistemas mecânicos, são definidas pelas características de massa, amortecimento e rigidez respectivas. Os valores de s para os quais o denominador da função de transferência se anula, ou seja as raízes de $U(s) = 0$, são designados pólos, da mesma maneira que os valores de s para os quais $Y(s) = 0$ se designam de zeros da função de transferência. Conhecidos os pólos e zeros da função de transferência, a função indicada na equação (3.30) pode ser reescrita na forma de pólos e zeros da seguinte maneira:

$$G(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_r)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

Onde: K é uma constante, $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$ e $z_j (j = 1, 2, \dots, r)$ são os pólos e zeros de $G(s)$.

3.6 Conversão de Espaço de Estado para Funções de Transferência

Partindo de um sistema dinâmico de vários graus de liberdade de múltiplas entradas e saídas, representado em espaço de estado pelas seguintes equações de estado e saída:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Pretende-se obter a representação deste sistema sob a forma da matriz de transferência, a qual é composta por um conjunto de funções de transferência em que cada uma delas relaciona, no domínio de Laplace, um determinado par Entrada-Saída do sistema. Assim usando a Transformada de Laplace, às equações de estado e saída, considerando nulas as condições iniciais do problema ($x(t=0) = 0$), tem-se:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \quad (3.31)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \quad (3.32)$$

Resolvendo a equação (3.31) em ordem a $X(s)$ obtém-se:

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

Substituindo o resultado de $X(s)$ na equação (3.32) vem que:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \quad (3.33)$$

A matriz $[C(sI - A)^{-1}B + D]$ é a matriz de transferência que permite-nos relacionar o vector de saída $Y(s)$ com o vector de entrada $U(s)$.

Em muitos casos, porém, o que se pretende encontrar é uma função de transferência específica, ou um número reduzido de funções de transferência. Nestas situações, pode utilizar-se a

equação (3.33) ajustando convenientemente a dimensão das matrizes B , C e D . Se se pretender encontrar apenas uma função de transferência, $Y(s)$ e $U(s)$ e D reduzem-se a escalares, e a equação anterior passa a ser dada por

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3.34)$$

Sabendo que:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{|sI - A|} \text{adj}(sI - A)$$

e substituindo esta relação na equação (3.34), resulta:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C \text{adj}(sI - A) B + (sI - A) D}{|sI - A|} \quad (3.35)$$

Sabendo que a resolução do problema $|sI - A|$ resulta na obtenção dos valores próprios da matriz A e, simultaneamente, que é pela anulação do denominador que se determinam os pólos da função de transferência.

3.7 Representação do sistema com AMD activo na forma de Funções de Transferência

Para a representação do sistema com AMD activo na forma de funções de transferência recorreu-se à equação 3.35, obtendo assim as seguintes funções de transferência de saída:

$$\ddot{x}_c = \frac{2.997s^4 - 2.795 \times 10^{-14}s^3 + 3322s^2 - 2.683 \times 10^{-11}s + 3.182 \times 10^5}{s^6 + 18.65s^5 + 1198s^4 + 2.067 \times 10^4s^3 + 1.446 \times 10^5s^2 + 1.98 \times 10^6s}$$

$$\ddot{x}_{f1} = \frac{-413.7s^3 - 1.355 \times 10^{-11}s^2 + 2.529 \times 10^{-11}s - 2.18 \times 10^{-9}}{s^5 + 18.65s^4 + 1198s^3 + 2.067 \times 10^4s^2 + 1.446 \times 10^5s + 1.98 \times 10^6}$$

$$\ddot{x}_{f2} = \frac{-0.9598s^5 - 413.7s^3}{s^5 + 18.65s^4 + 1198s^3 + 2.067 \times 10^4s^2 + 1.446 \times 10^5s + 1.98 \times 10^6}$$

3.8 Determinação das características físicas de um sistema linear

Nesta secção pretende-se demonstrar a relação entre a posição dos pólos da função de transferência, no plano-complexo, bem como as características dinâmicas de uma estrutura.

3.8.1 Método do Lugar das Raízes

O método do lugar das raízes consiste basicamente na representação gráfica da localização dos pólos de um sistema em malha fechada em função da variação de um parâmetro de ganho K . O projecto de controladores envolve sempre a escolha da localização de pólos e zeros do sistema em malha fechada, que deve ser traduzida através da escolha da estrutura do controlador e dos seus parâmetros. Desta forma, a utilização do lugar das raízes pode ser útil no projecto de controladores, pois neste, pode-se observar a movimentação dos pólos em malha fechada a medida que um parâmetro K varia, fornecendo assim uma informação qualitativa relativa a estabilidade do sistema.

A determinação dos pólos e dos zeros das funções de transferência em malha fechada e malha aberta de um sistema, é uma tarefa indispensável para a definição do diagrama do lugar das raízes. A determinação dos pólos e zeros da função de transferência em malha aberta não oferece qualquer dificuldade na medida em que, conhecidos individualmente os pólos e zeros das funções $G(s)$ e $H(s)$, os pólos e zeros de $G(s)H(s)$ são dados pelo somatório dos pólos e zeros de cada uma das funções. No caso da função de transferência em malha fechada esta tarefa não é tão directa. Para o demonstrar, considere-se novamente a função de transferência em malha fechada de um sistema já deduzida na subsecção 2.1.4, na qual o ganho K aparece claramente explicitado:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

As funções de transferência $G(s)$ e $H(s)$, associadas à estrutura com controlador e ao sensor, podem ser escritas em termos do seu conteúdo em numerador e denominador, na seguinte forma

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)}$$

e

$$H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

Logo, a função de transferência em malha fechada pode ser expressa da seguinte maneira:

$$T(s) = \frac{K \frac{N_G(s)}{D_G(s)}}{1 + K \frac{N_G(s)}{D_G(s)} \frac{N_H(s)}{D_H(s)}}$$

Resultando assim,

$$T(s) = \frac{KN_G(s)D_H(s)}{D_G(s)D_H(s) + KN_G(s)N_H(s)}$$

Pode-se então dizer que os zeros de $T(s)$ são dados pelo zeros da função $G(s)$ e pelos pólos de $H(s)$ e não dependem do ganho K , logo, podem ser imediatamente conhecidos. Já os pólos

de $T(s)$ dependem de K , e não podem ser conhecidos sem que primeiro se proceda à expansão do denominador e posteriormente à determinação das suas raízes.

A utilização deste método é particularmente interessante no estudo de sistemas de controlo porque, além da sua simplicidade, o posicionamento dos pólos do sistema no plano complexo tem um significado físico bastante importante, ou seja, o valor de cada pólo está directamente relacionado com as características dinâmicas do modo de vibração que lhe está associado. Isto quer dizer que através da utilização do diagrama do lugar das raízes, é possível avaliar quais as modificações introduzidas na estrutura em termos de frequências naturais e coeficientes de amortecimento, associadas ao ganho adoptado para o sistema de controlo. No caso de sistemas mecânicos lineares de vários graus de liberdade, os pólos da função de transferência são dados pela expressão seguinte:

$$p_i = -\xi_i \omega_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} = -\xi_i \omega_i \pm j \omega_{d,i} \quad (3.36)$$

Sendo p_i os pólos do sistema, ω_i a i ésima frequência natural do sistema, $\omega_{d,i}$ a frequência amortecida e ξ_i o correspondente coeficiente de amortecimento. Repare-se que a cada frequência do sistema estão associados dois pólos complexos conjugados, um no plano associado à parte positiva do eixo imaginário e outro na parte negativa deste, o que leva a concluir que, qualquer que seja o modelo estrutural em análise, existe sempre uma simetria gráfica em torno do eixo real. Na Figura 3.6 está efectuada a representação de um par desses pólos, a partir da qual é possível estabelecer um conjunto de relações entre o posicionamento gráfico dos pólos e o seu significado físico.

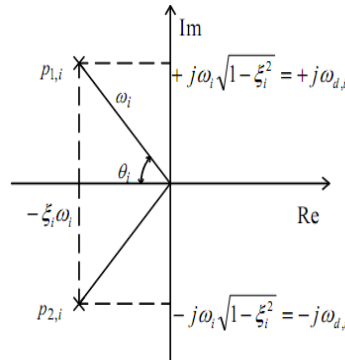


Figura 3.6: Representação dos pólos no plano complexo

Começando por determinar a norma M do vector que liga a origem dos eixos a um dos pólos, obtém-se:

$$M = \sqrt{(-\xi_i \omega_i)^2 + (j \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2})^2} = \omega_i$$

ou seja, a distância do pólo à origem dos eixos está directamente relacionada com a frequência natural do sistema ω_i . Isto quer dizer que, no diagrama do lugar das raízes se pode traçar um conjunto de circunferências concêntricas na origem dos eixos, sendo que, cada uma delas representa uma determinada frequência natural em correspondência com o valor do seu raio. Então, se os pólos do sistema se estiverem a afastar da origem dos eixos, tal significa que a correspondente frequência natural está a aumentar, ou caso contrário que a frequência natural do sistema está a diminuir. Também se pode concluir que o traçado de cada circunferência no eixo real ou no eixo imaginário está em correspondência directa com a frequência natural que representa.

Calcule-se agora, o ângulo θ_i indicado figura anterior, sendo este dado por:

$$\cos\theta_i = \frac{\xi_i\omega_i}{\omega_i} = \xi_i$$

Assim observa-se que se pode obter o coeficiente de amortecimento associado à localização do pólo, calculando o cosseno do ângulo do vector que une o pólo à origem dos eixos, medido a partir do lado negativo do eixo real. Logo, resulta que se os pólos do sistema estiverem sobre o eixo imaginário, então estarão em correspondência com modos de vibração com coeficiente de amortecimento nulo, pois, nesta situação tem-se: $\xi_i = \cos(\pm 90^\circ) = 0$. Por outro lado, se os pólos estiverem próximos do eixo real, o respectivo coeficiente de amortecimento será próximo de 1, pois $\xi_i = \cos(0^\circ) = 1$, estando neste caso associados o modos de vibração fortemente amortecidos.

Através da equação anterior também se consegue retirar uma conclusão importante no que diz respeito à estabilidade de sistemas: que todos os pólos situados à direita do eixo imaginário têm coeficientes de amortecimento negativo, na medida em que qualquer ângulo θ_i , tal que $90^\circ < |\theta_i| \leq 180^\circ$, tem cosseno negativo. Logo, pode-se dizer que qualquer pólo situado nesta região do plano complexo fica potencialmente sujeito a um movimento vibratório sucessivamente amplificado em vez de amortecido, ou seja, pode conduzir a uma situação de instabilidade do sistema provocada pela vibração descontrolada do modo de vibração que representa.

3.9 Características dinâmicas do sistema

Nesta secção analisam-se as características dinâmicas da estrutura AMD no topo da estrutura fixo, com AMD passivo e activo e também a resposta da estrutura devido a condições iniciais impostas e à função impulso unitário.

3.9.1 Características dinâmicas do sistema com AMD fixo

As características dinâmicas do sistema serão obtidas a partir da posição dos pólos do sistema, no plano-complexo. Os pólos do sistema correspondem à solução da equação característica:

$$|sI - A| = 0$$

Sendo assim, a matriz de estado A é a seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -431.03 & 431.03 & 0 & 0 \\ 431.03 & -677.34 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, através da resolução da equação característica obteve-se a Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Pólos do sistema com AMD fixo

Número	Pólos do sistema
1	$10.29i$
2	$-10.29i$
3	$31.66i$
4	$-31.66i$

Conforme apresentado na Figura 3.7, existem dois pares de pólos complexos conjugados correspondentes aos dois modos de vibração da estrutura.

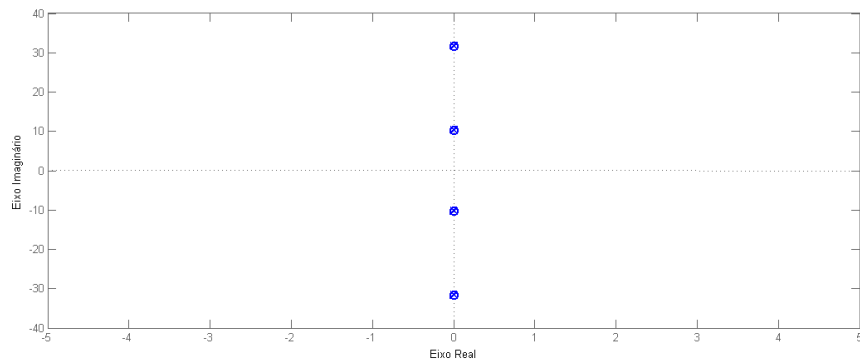


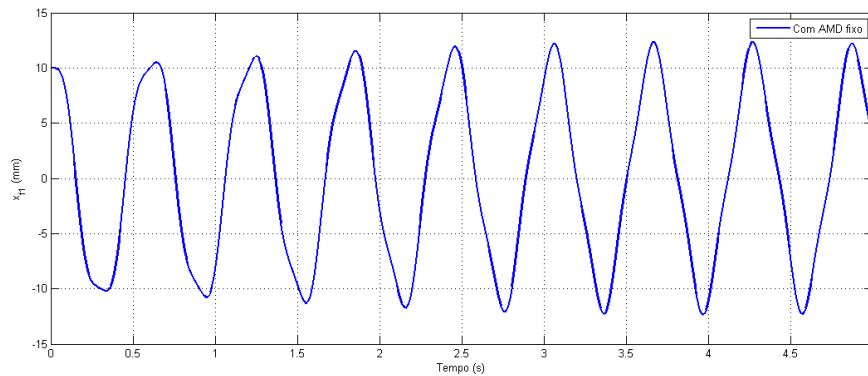
Figura 3.7: Pólos do sistema com AMD fixo

Através da Tabela 3.3 pode-se dizer que existe uma diminuição das frequências próprias da estrutura em relação ao sistema sem AMD, tendo para o primeiro modo uma frequência de 12.8 rad/s e para o segundo modo de 33.6 rad/s [35], e os modos de vibração adquirem coeficientes de amortecimento nulos, apesar de na realidade existir algum amortecimento devido ao atrito das ligações dos pisos.

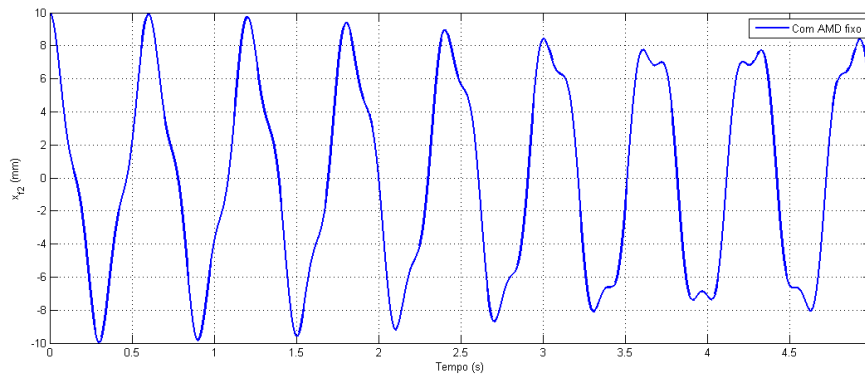
Tabela 3.3: Características dinâmicas da estrutura com AMD fixo

Modos de vibração	f (rad/s)	ξ (%)
1º Modo	10.30	0
2º Modo	31.70	0

Nos gráficos da Figura 3.8 e considerando o coeficiente de amortecimento nulo na matriz de estado A , consegue-se ver o comportamento da estrutura para condições iniciais não nulas.



(a) Deslocamento relativo do 1º piso para condições iniciais não nulas com AMD fixo.



(b) Deslocamento relativo do 2º piso para condições iniciais não nulas com AMD fixo

Figura 3.8: Deslocamentos relativos de cada piso para condições iniciais não nulas com AMD fixo

3.9.2 Características dinâmicas do sistema com AMD passivo e com AMD activo

As características dinâmicas do sistema com AMD passivo e com o AMD activo são as mesmas, visto que a matriz de estado A e matriz de saída C são as mesmas, logo os seus pólos e os coeficientes de amortecimento são os mesmos. Apenas neste caso existe a matriz de entrada

B e a matriz de transmissão directa D . Sendo assim, a matriz de estado A é a seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 278.43 & -18.69 & 0 & 0 \\ 0 & -431.03 & 431.03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 431.03 & -766.49 & 5.98 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim através da resolução da equação característica obteve-se os pólos do sistema (Tabela 3.4).

Tabela 3.4: Pólos do sistema com AMD passivo e com AMD activo

Número	Pólos do sistema
1	0
2	$-0.67 + 10.70i$
3	$-0.67 - 10.70i$
4	-16.50
5	$-0.41 + 32.30i$
6	$-0.41 - 32.30i$

Conforme apresentado na Figura 3.9, existem dois pares de pólos complexos conjugados relativos aos dois modos de vibração da estrutura. Os restantes pólos são reais e representam modos associados ao sistema AMD. O pólo posicionado na origem do plano-complexo indica que, ao aplicar-se uma perturbação ao AMD, ele desloca-se sem retornar à posição inicial. Também no domínio da frequência se pode ver que existe dois grandes picos na magnitude relativos ao AMD (Figura 3.10) o que quer dizer que existe um dos pólos do AMD numa zona marginalmente estável.

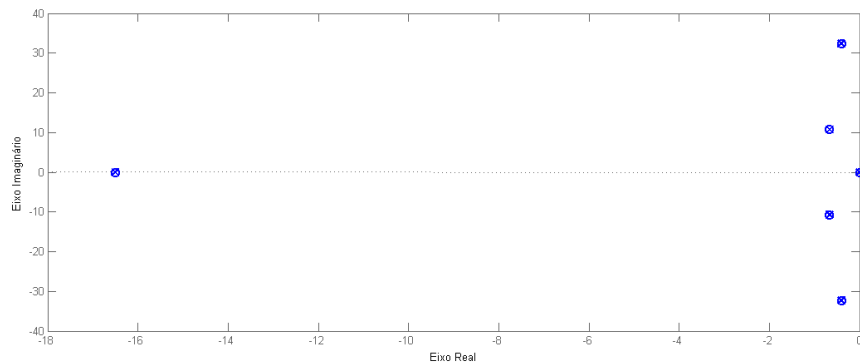


Figura 3.9: Pólos do sistema com AMD passivo e com AMD activo

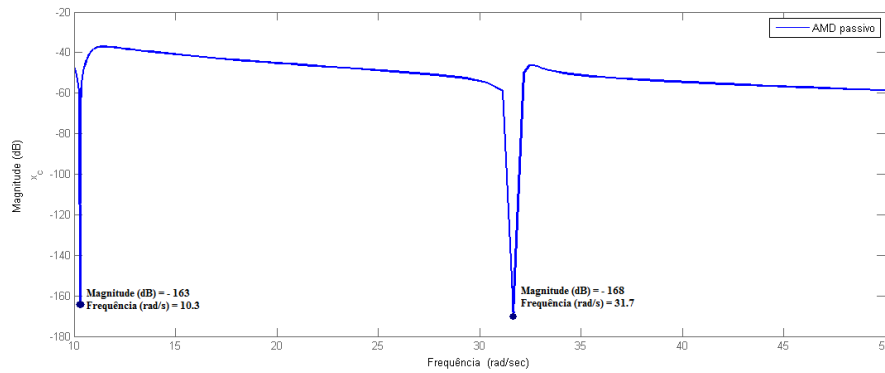


Figura 3.10: Função de resposta em frequência do AMD passivo

A Tabela 3.5 refere-se aos modos de vibração da estrutura indicando as frequências próprias e os respectivos coeficientes de amortecimento.

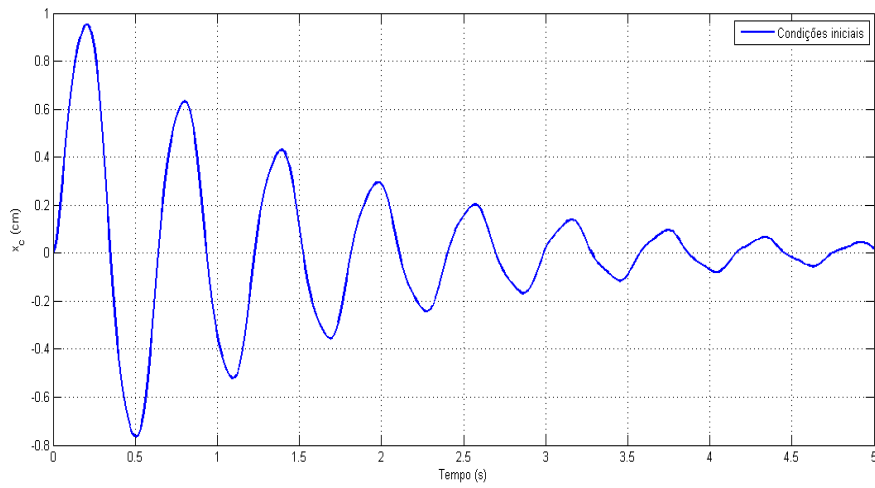
Tabela 3.5: Características dinâmicas da estrutura

Modos de vibração	f (rad/s)	ξ (%)
1º Modo	10.7	6.24
2º Modo	32.3	1.25

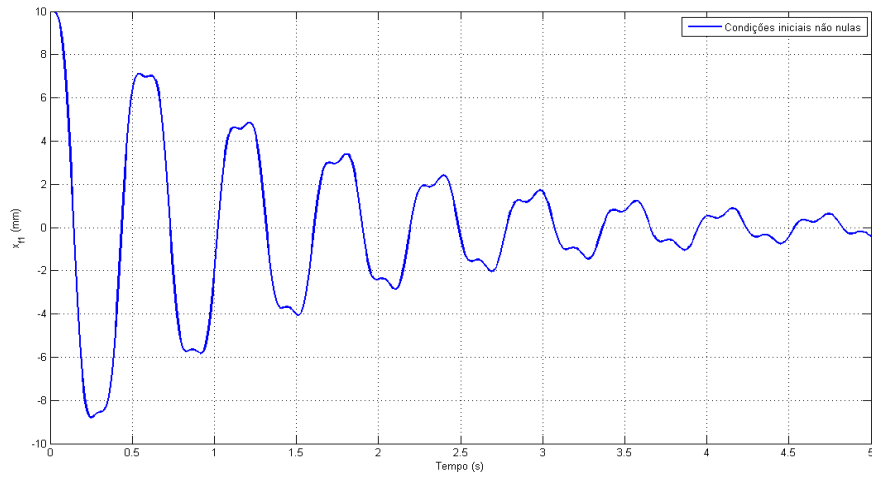
A resposta da estrutura quando solicitada a condições iniciais não nulas ($x_{f1} = x_{f2} = 0.01m$) apresenta um comportamento de vibrações livres com valores razoáveis, com amortecimento baixo (Figuras 3.11a, 3.11b e 3.11c).

A resposta da estrutura quando solicitada pela função impulso unitário está analisada para avaliar a estabilidade do sistema e a sua capacidade de rejeição de um disúrbio externo. Através das Figuras 3.12a, 3.12b e 3.12c pode-se vêr que o deslocamento do AMD é o mais afectado pela função impulso unitário, a falta de rigidez do AMD e da acção do controlo impossibilitam o seu regresso à posição inicial. A amplitude máxima do deslocamento é de 17.8 cm e estabiliza-se nos 15.8 cm , o que em termos físicos ultrapassa o limite do deslocamento máximo do AMD de 8 cm . O deslocamento do primeiro e do segundo piso apresenta um valor máximo de 24 mm e de 28 mm , respectivamente, e a velocidade de estabilização dos deslocamentos relativos dos pisos é bastante lenta.

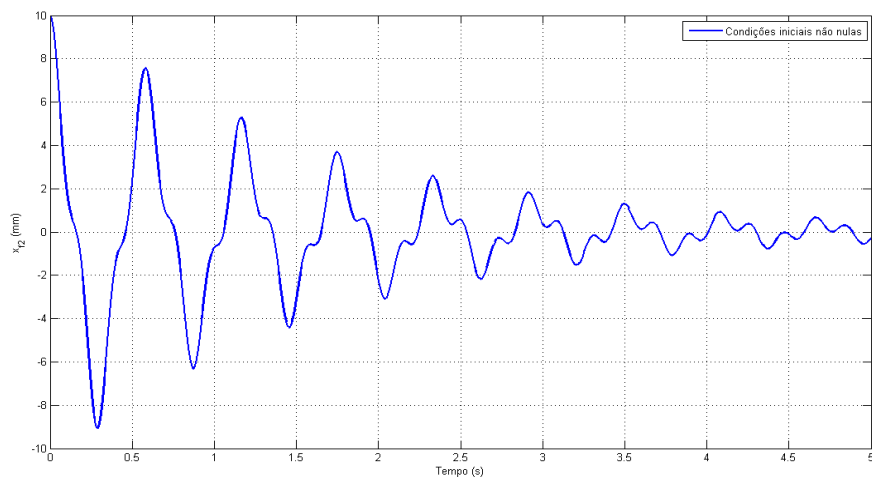
Esse comportamento deve-se ao posicionamento de um dos pólos do AMD na origem do plano-complexo (Tabela 3.4 e Figura 3.9) e a valores de amortecimento baixos associados aos modos de vibração do pórtico (Tabela 3.5). Este amortecimento é adquirido através da dissipação da energia por atrito o que confere amortecimento passivo à estrutura.



(a) Deslocamento relativo do AMD para condições iniciais não nulas com AMD passivo

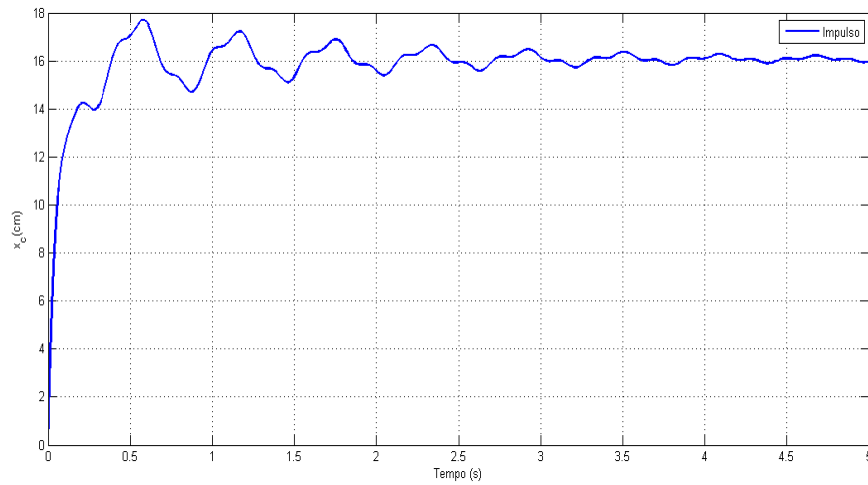


(b) Deslocamento relativo do 1º piso para condições iniciais não nulas com AMD passivo

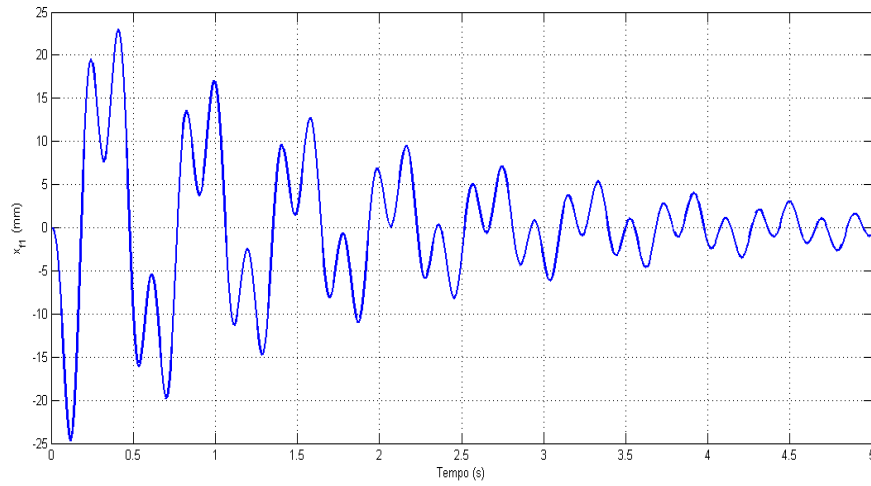


(c) Deslocamento relativo do 2º piso para condições iniciais não nulas com AMD passivo

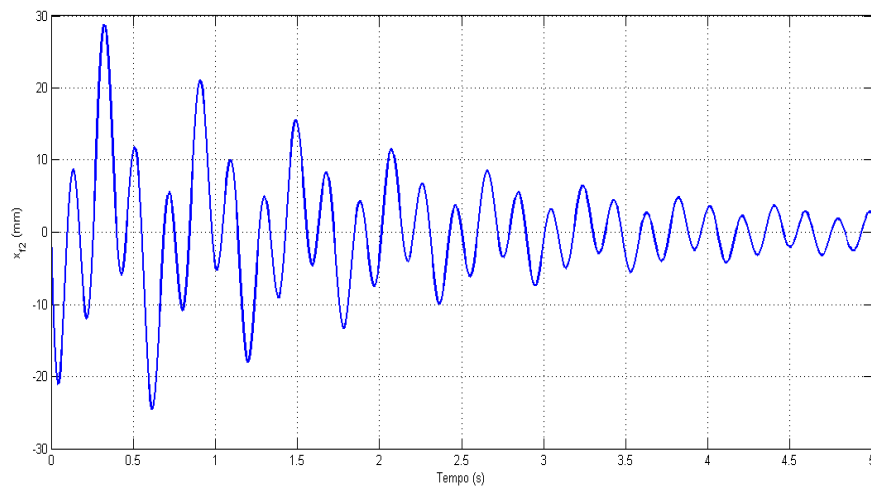
Figura 3.11: Deslocamentos relativos do AMD e de cada piso para condições iniciais não nulas com AMD passivo



(a) Deslocamento relativo do AMD para função impulso com AMD passivo



(b) Deslocamento relativo do 1º piso para a função impulso com AMD passivo



(c) Deslocamento relativo do 2º piso para a função impulso com AMD passivo

Figura 3.12: Deslocamentos relativos do AMD e dos pisos para a função impulso com AMD passivo

Capítulo 4

Dimensionamento de Controladores

No âmbito do controlo pode-se falar em controlo clássico e em controlo moderno. No controlo clássico, o conceito mais utilizado é o de funções de transferência onde a análise e o dimensionamento é realizado no domínio da frequência, através por exemplo do método do lugar de raízes. As funções de transferência permitem obter bons resultados no dimensionamento de controladores para sistemas com uma entrada e uma saída. No controlo moderno tem sido desenvolvido para resolver sistemas complexos, com múltiplas entradas e múltiplas saídas,[34]. No dimensionamento de controladores, aplicando técnicas do controlo moderno, usam-se ferramentas de cálculo automático que permitem resolver sistemas representados sob a forma de espaço de estados e a sua análise e dimensionamento são feitos no domínio do tempo.

Neste trabalho é abordado uma estratégia de controlo moderno, dado-se mais ênfase ao controlo ótimo, tendo este conta o gasto de energia associado à acção de controlo, melhorando assim o comportamento dinâmico das estruturas. O presente capítulo demonstra os vários passos necessários para dimensionar um controlador do tipo LQR e um observador de estados através do filtro de Kalman pelo método do regulador linear Gaussiano (LQG).

4.1 Dimensionamento Via Realimentação de Estados

4.1.1 Controlabilidade

A força de excitação no sistema dinâmico pode não ser capaz de excitar todos os estados, ou seja, movê-los numa direcção arbitrária e, nem todos os estados serem representados na saída, ou seja, os estados do sistema podem não ser recuperados das medidas da saída. O conceito de controlabilidade é uma propriedade estrutural que contém informações úteis para controlo e testes estruturais e desempenha um papel importante no projecto de sistemas de controlo no espaço de estados. Com efeito, as condições de controlabilidade podem governar

a existência de uma solução completa para o problema de dimensionamento de controlo. A solução para este problema pode não existir se o sistema for não-controlável. Embora a maioria dos sistemas físicos seja controlável, os modelos matemáticos correspondentes podem não possuir as propriedades de controlabilidade. Controlabilidade, como um acoplamento entre a entrada e os estados, envolve a matriz de estados A e a matriz de entrada B . Uma estrutura é controlável se os actuadores instalados conseguem excitar todos os seus modos estruturais. Ou seja, um sistema linear, ou o par (A, B) é dito controlável no instante t_0 se for possível, por meio de um vector de controle $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, transferir o sistema de qualquer estado inicial $x(t_0)$ para qualquer outro estado num intervalo de tempo finito $t_1 > t_0$. Caso contrário o sistema é dito, não controlável, [18].

A matriz de controlabilidade C_b depende da matriz de estado A e da matriz de entrada B .

$$C_b = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Um sistema com n variáveis de estado pode ser completamente controlado se a matriz de controlabilidade C_b tiver característica n , ou seja, se tiver n linhas ou colunas linearmente independentes.

Quando o sistema não é completamente controlável, significa que, em termos dinâmicos, haverá modos de vibração onde não existe qualquer acção de controlo.

4.1.2 Observabilidade

O conceito da observabilidade de um sistema está de certa forma relacionado com o conceito de controlabilidade, mas, neste caso, na perspectiva da observação da resposta dos modos de vibração da estrutura, e não na perspectiva do controlo desses modos.

Observabilidade, como um acoplamento entre os estados e a saída, envolve a matriz de estados A e a matriz de saída C . Uma estrutura é observável se todos os sensores instalados detectam os movimentos de todos os modos, ou seja, um sistema linear ou o par (A, C) é observável no instante t_0 se o estado $x(t_0)$ pode ser determinado pela saída $y(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, onde $t_1 > t_0$ é um intervalo de tempo finito. Se isto for verdadeiro para todo momento inicial t_0 e todos os estados $x(t_0)$, o sistema é completamente observável, caso contrário o sistema é dito não observável, [18].

Existem vários critérios matemáticos para se determinar estas propriedades, que envolvem as matrizes A, C , sendo assim a matriz de observabilidade O_b , dada por:

$$O_b = \begin{bmatrix} C^T & C^T A^T & C^T (A^T)^2 & \dots & C^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix}$$

Um sistema será completamente observável se a matriz de observabilidade O_b , tiver característica n , sendo n o número de variáveis de estado, [34]. No caso do sistema não ser completamente observável, podem identificar-se os modos não observáveis recorrendo à representação gráfica de todas as configurações modais, ou, em alternativa, recorrendo à representação do sistema na sua forma modal.

4.1.3 Estabilidade

Um dos conceitos com extrema importância a nível da análise do comportamento de um sistema dinâmico é o de estabilidade. Um sistema pode ser estável, instável ou assintoticamente estável. Diz-se que é estável se, e só se, todos os pólos possuírem parte real menor ou igual a zero, e se todos os pólos com parte real igual a zero forem simples. Neste caso, diz-se que o sistema é estável, mas não necessariamente assintoticamente estável, visto que a resposta poderá, ou não, aproximar-se de um determinado valor constante quando, $t \rightarrow \infty$. Caso contrário, isto é, se qualquer um dos pólos tiver parte real positiva ou se os pólos com parte real igual a zero forem múltiplos então, com o avançar do tempo, a resposta transitória aumenta monotonamente ou oscila com amplitude crescente, tornando o sistema instável, [3]. A estabilidade ou instabilidade é uma propriedade do sistema, não dependendo da perturbação aplicada ao sistema, mas depende da acção de controlo, [5]. Existem diversos métodos que nos permitem calcular os pólos de um sistema e saber se os mesmos se encontram na metade direita ou esquerda do plano complexo, como o critério de Routh-Hurwitz, método do Lugar das Raízes ou ainda o critério de estabilidade de Nyquist.

Com o auxílio do programa MATLAB, e recorrendo às funções *pole*, *zero* ou *pzmap*, consegue-se assim estudar a estabilidade do sistema em questão.

4.2 Regulador Linear Quadrático (LQR)

Os sistemas de controlo são normalmente projectados com o objectivo de alcançar determinado desempenho com o menor gasto de energia possível. A este tipo de sistema que minimiza o custo associado ao processo, designa-se de controlo óptimo,[1]. Para tal, é necessário conhecer a função objectivo que será minimizada no dimensionamento desse mesmo sistema. O controlo do tipo LQR baseia-se na minimização de um parâmetro quadrático que está directamente associado à energia das variáveis de estado e dos sinais de controlo a serem projectados. Para a aplicação deste tipo de controlo pressupõe que o mesmo esteja escrito na forma de espaço de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

sendo a sua lei de controlo dada por:

$$u(t) = -K(x - x_d)$$

onde x_d representa o vector de estado desejável no equilíbrio do sistema.

Assim, a equação (4.2) pode ser reescrito seguinte modo

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x + BKx_d \quad (4.3)$$

Relacionando a equação (4.2) com a equação (4.3) observa-se $(A - BK)$ sendo esta a matriz A inicial e BK a matriz B .

O objectivo, usando este método, é de determinar a matriz K , por forma a minimizar o seguinte índice de desempenho, através da seguinte equação para o tempo contínuo:

$$J = \int_0^{\infty} x^T Q x dt + \int_0^{\infty} u^T R u dt \quad (4.4)$$

Em tempo discreto a equação do gasto de energia é dada por:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) \quad (4.5)$$

O segundo termo da equação (4.4) reflecte o gasto de energia dos sinais de controlo, e Q e R são matrizes de ponderação que determinam a importância relativa do erro e desse gasto de energia, ou seja, representam as penalizações impostas à resposta obtida, $x(t)$, e ao controlo empregue ao longo do tempo, $u(t)$. Note-se que, Q é uma matriz Hermitiana ou real simétrica e definida positiva (ou semi-definida positiva) e R é uma matriz Hermitiana ou real simétrica e definida positiva.

A determinação destas matrizes é um procedimento demorado e trabalhoso que, geralmente, é feito por tentativa e erro, escolhem-se matrizes diagonais pois assim as componentes do estado e do controlo são afectadas individualmente ($Q \geq 0$; $R \geq 0$), influenciando assim não só a estabilidade como a rapidez do sistema e facilitando assim o seu ajuste e também a interpretação dos resultados. O método de Bryson, [1], sugere uma definição para Q e R , colocando-as como matrizes diagonais onde cada um dos termos é o quadrado do inverso do máximo esperado para cada variável, sendo estas dadas por:

$$Q_{ii} = \frac{1}{x_{i,máx.}^2} \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.6)$$

$$R_{ii} = \frac{1}{u_{i,máx}^2} \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.7)$$

Após a determinação das matrizes Q e R que se adequam melhor ao sistema, a matriz de ganho, K , pode ser encontrada resolvendo a equação de Riccati, explicada na subsecção abaixo. Na parte prática deste trabalho recorre-se ao comando *lqrd* do MATLAB para calcular a referida matriz, contudo, este tem por base o procedimento seguidamente demonstrado.

4.2.1 Equação de Riccati para o tempo contínuo

Partindo da equação de espaço de estados do sistema, $\dot{x} = Ax + Bu$ e da lei de controlo definida por, $u(t) = -Kx(t)$ a equação de Riccati permite obter a matriz de ganho óptima do sistema $t \neq \tau$, [28].

Substituindo $u(t) = -Kx(t)$ na expressão $\dot{x} = Ax + Bu$ tem-se:

$$\dot{x} = Ax - BKx = (A - BK)x$$

E substitui $u(t) = -Kx(t)$ na equação (4.4) vem,

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + x^T K^T R K x) dt = \int_0^{\infty} x^T (Q + K^T R K) x dt$$

Assim, a expressão que permite determinar o valor óptimo da matriz K é dada por:

$$K = R^{-1} B^T P \quad (4.8)$$

A matriz P precisa satisfazer a equação algébrica de Riccati definida do seguinte modo:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

Resolvendo a equação anterior em função de P e substituindo o resultado obtido na equação (4.8) é possível determinar a matriz K .

4.2.2 Equação de Riccati para o tempo discreto

Agora para o tempo discreto tem-se a seguinte equação de espaço de estados, [28]:

$$\dot{x}_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

Sendo a equação do gasto da energia dada por:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k)$$

A lei de controlo é definida por:

$$u_k = -K x_k$$

Onde, a expressão que permite determinar o valor óptimo da matriz K é a seguinte:

$$K = (R + B^T P B)^{-1} B^T P A \quad (4.9)$$

E a matriz P é a única solução positiva definida para o tempo discreto na equação algébrica de Riccati, sendo esta dada por:

$$P = Q + A^T (P - P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P) A$$

Resolvendo a equação anterior em função de P e substituindo o resultado obtido na equação (4.9) é possível determinar a matriz K .

4.3 Regulador Linear Quadrático Gaussiano (LQG)

Na teoria do controlo, a dificuldade do LQG é provavelmente o mais fundamental no problema do controlo óptimo. Trata-se de um tipo de sistemas lineares perturbados com ruído branco Gaussiano aditivo, com informações sobre o estado incompleto ou seja, nem todas as variáveis de estado são medidas e disponíveis para conclusões. Além disso, a solução é única e constitui um retorno das leis de controlo dinâmico linear que é facilmente calculado e aplicado. O controlador LQG é também fundamental para o controlo de perturbação óptima de sistemas não-lineares [30]. O uso deste tipo de controlo é simplesmente a combinação de um filtro de Kalman ou seja, um estimador linear quadrático (AQP), com um regulador linear quadrático (LQR). Na teoria do controlo, o princípio da separação, também conhecido como princípio da separação da estimação e do controlo, dá-nos garantias de que estes podem ser dimensionados e calculados de forma independente. Este princípio diz que em algumas hipóteses o problema de dimensionar um controlador de realimentação ideal para um sistema estocástico pode ser resolvido através da realização de um observador ideal para o estado do sistema, que alimenta um controlador determinístico óptimo. Através deste princípio, se um observador estável e realimentação de estados estáveis são concebidos para um sistema invariante no tempo linear, então o observador combinado e o retorno será estável. Um exemplo deste princípio é a separação da solução de controlo linear quadrático Gaussiano no filtro de Kalman e o controlador óptimo para um regulador linear quadrático. Este princípio da separação não é

suportado na generalidade, por exemplo, para sistemas não-lineares tal princípio não pode ser aplicado.

O controlo LQG aplica-se tanto a tempo de sistemas lineares invariantes, bem como a sistemas lineares variantes no tempo. A aplicação de sistemas invariantes no tempo linear é de conhecimento mais fácil e menos demoroso. A aplicação de sistemas lineares variantes no tempo permite o projecto de controladores de realimentação linear de sistemas não-lineares incertos. O controlador LQG em si trata-se de um sistema dinâmico, bem como o sistema que ele controla. Ambos os sistemas têm a dimensão do mesmo estado. Portanto a implementação do controlador LQG pode ser problemático se a dimensão do estado do sistema é grande. Este método LQG de ordem reduzida domina-se fixando *a priori* o número de estados do controlador LQG. Esse problema é mais difícil de resolver porque não é separável. Finalmente, um controlo óptimo através do LQG não garante automaticamente propriedades de uma boa robustez do sistema, [20]. A estabilidade da robustez do sistema de malha fechada deve ser verificada separadamente após o controlador LQG for concebido. Para promover a robustez alguns dos parâmetros do sistema podem ser considerados estocásticos em vez de determinísticos. A dificuldade do controlo associado leva a um melhor controlo semelhante de que só os parâmetros do controlador são diferentes, [42].

O método LQG é formulado como um problema de optimização estocástica, dado por:

$$J = E \left(x^T(t_f) F x(t_f) + \int_0^{t_f} x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t) dt \right),$$

$$F \geq 0, \quad Q(t) \geq 0, \quad R(t) > 0,$$

onde E denota expectativa (valor médio). O tempo final (horizonte) t_f pode ser finito ou infinito. Se o horizonte tende ao infinito o primeiro termo $x^T(t_f) F x(t_f)$ da função de custo torna-se insignificante e irrelevante para o problema. Também para manter os custos das funções do finito custo tem de ser tomada J/t_f neste caso.

A formulação que resolve um problema de LQG é especificado pelas seguintes equações,

$$\dot{x}_o(t) = A x(t) + B u(t) + L_K (y(t) - C x_o(t)), \quad x_o(0) = E(x(0))$$

$$u(t) = -K x(t)$$

A matriz L_K é chamado de ganho de Kalman associado do filtro de Kalman representada pela primeira equação e K é o ganho de realimentação óptimo. Em cada tempo t o filtro de Kalman gera estimativas $x_o(t)$ do estado $x(t)$ usando as medidas passadas e as saídas. O ganho de Kalman L_K é calculado a partir de matrizes A , C . A matriz K é o ganho de realimentação óptimo e é calculada da mesma maneira do controlo através do LQR, demonstrado anteriormente.

4.4 Observador de Estados

Quando não estão todas as variáveis de estado disponíveis para medição, o sistema de controlo por realimentação de estados não pode ser feito, a não ser que as variáveis sejam estimadas. Processos de derivação de variáveis para obtenção de outras não são aconselháveis, tendo em vista que o processo de derivação acarreta decréscimo da relação ruído do sistema. Dependendo das grandezas com que se trabalha a relação sinal/ruído pode ser comprometida por um simples processo de derivação. As variáveis não medidas, no entanto, podem ser estimadas. Um dispositivo, circuito eléctrico ou programa de computador que estime essas variáveis é chamado de observador de estado ou simplesmente observador. Quando todas as variáveis do sistema são estimadas, este observador é chamado de ordem completa. Quando o número de variáveis estimadas é menor que o total das variáveis do sistema este observador é chamado de observador de ordem reduzida. Basicamente, um observador de estado é um modelo matemático do sistema, ou seja, um sistema abstracto implementado por um programa de computador, baseado no seu comportamento físico. O modelo matemático é usado para construir o sistema físico baseado na estrutura de um sensor. Assumindo um sistema descrito na forma de espaço de estados, o observador dinâmico pode ser escrito na seguinte forma, [34]:

$$\dot{x}_o(t) = Ax_o(t) + Bu(t) + L_K [y(t) - Cx_o(t)] \quad (4.10)$$

Onde, $x_o(t)$ representa a estimativa do vector de estado, $y(t)$ é a variável de estado disponível para medida e L_K é uma matriz cujo objectivo é introduzir um factor de peso a um termo de correcção baseado na diferença verificada entre a resposta medida $y(t)$ e a resposta estimada Cx_o . Esta equação é conhecida como a equação de Luenberger, [29], a qual traduz o modelo dinâmico da estimativa do erro, e não do sistema estrutural, como à partida se poderia pensar. Repare-se que as variáveis de entrada são $u(t)$ e $y(t)$ e a saída é $x_o(t)$, ou seja, conhecidas a solicitação exterior e a saída do sistema, a resolução da equação (4.10), fornece a estimativa do vector de estado, tendo por base as matrizes A e B da estrutura em análise. Defina-se o vector erro $e(t)$ como sendo a diferença entre o vector de estado efectivo e o vector de estado estimado, ou seja,

$$e(t) = x(t) - x_o(t)$$

Sendo a sua derivada

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_o(t) \quad (4.11)$$

Admitindo que o comportamento do sistema é definido pela equação $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ e que o observador de estado é caracterizado pela equação (4.10) e assim substituindo estas na equação (4.11) permite obter:

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_o(t) = Ax(t) + Bu(t) - Ax_o(t) + Bu(t) + L_K[y(t) - Cx_o(t)]$$

O vector de erro representa o erro entre o sistema real e o observador dinâmico. A derivada do vector de erro, também pode ser descrita considerando $y(t) = Cx(t)$, sendo assim o erro dado por:

$$\dot{e}(t) = (A - L_K C)e(t)$$

Assim pode-se dizer que a dinâmica do erro pode ser calculada pelos valores próprios da matriz $A - L_K C$.

Se a matriz $A - L_K C$ for uma matriz estável, o vector erro convergirá para zero seja qual for o valor inicial do vector erro $e(0)$. Além disso, se o sistema for completamente observável pode-se provar que é possível escolher uma matriz L_K tal que a matriz $A - L_K C$ possua valores próprios desejados. Então, para o dimensionamento de um observador de ordem completa é determinar a matriz de ganho do observador L_K tal que a matriz $A - L_K C$ possua valores próprios adequados. Esses valores próprios são usualmente escolhidos de modo que a resposta do observador seja mais rápida que a resposta do sistema,[34]. Uma regra prática consiste em escolher uma resposta do observador pelo menos duas a cinco vezes mais rápida que a resposta do sistema. Nos sistemas de controlo com realimentação de estados, pode-se utilizar os estados estimados para realimentar o sistema. O esquema de um sistema de controlo de realimentação que utiliza um observador de estados é demonstrado na Figura 4.1.

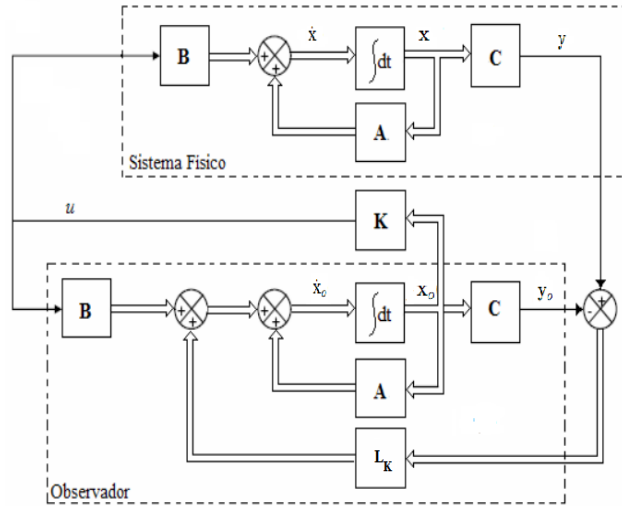


Figura 4.1: Sistema de controlo por realimentação de estados utilizando observador.

4.5 Filtro de Kalman

O filtro de Kalman foi desenvolvido em 1960 por Rudolf Emil Kalman, [24], que publicou um artigo de referência descrevendo uma solução recursiva para o problema da filtragem linear de dados discretos ou seja que serve para identificar o estado oculto (não mensurável) de um

sistema dinâmico linear. Desde então, devido aos grandes avanços da computação digital, o filtro de Kalman tem sido uma ferramenta muito importante nas áreas da navegação, da monitoração de processos, da astronomia, da economia e da reconstrução de sinais degradados por ruído, etc. Na realidade, o filtro de Kalman é um algoritmo para o cálculo de estimativa de estados instantâneos de um sistema dinâmico linear perturbado por ruído branco usando-se medidas linearmente relacionadas aos estados que também podem estar corrompidas por ruído branco. Na prática, o filtro de Kalman é um conjunto de equações de estados, as quais contêm informações necessárias sobre o comportamento do sistema e permitem uma solução computacional e eficiente para o método dos mínimos quadrados.

4.5.1 Filtro de Kalman de tempo contínuo

O filtro de Kalman é um estimador usado em aplicações que requerem a reconstrução dos estados através de medições do ruído, baseado num tratamento probabilístico do processo e medição do ruído,[7] .

O sistema na forma de espaço de estados considerando um sinal de distúrbio (ou ruído de excitação de estado) w e um sinal de ruído no sensor v , é dado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_1w(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t)$$

A função de custo a ser minimizada é dada por:

$$J = E \left(x^T(t_f) F x(t_f) + \int_0^{t_f} x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t) dt \right),$$

$$F \geq 0, \quad Q(t) \geq 0, \quad R(t) > 0,$$

onde E denota expectativa (valor médio). O tempo final (horizonte) t_f pode ser finito ou infinito. Se o horizonte tende ao infinito o primeiro termo $x^T(t_f) F x(t_f)$ da função de custo torna-se insignificante e irrelevante para o problema. Também para manter os custos das funções do finito custo tem de ser tomada J/t_f neste caso.

Devido à natureza estocástica dos vectores w e v , no filtro de Kalman, estes são supostos ter propriedades estatísticas, correspondentes a ruído Gaussiano branco, estacionário (invariante no tempo) e não correlacionados entre si, assim tem-se:

$$E[w] = 0, \quad E[v] = 0 \tag{4.12}$$

$$E[ww^T] = W\delta(t - \tau), \quad E[vv^T] = V\delta(t - \tau) \tag{4.13}$$

$$E[vw^T] = E[wv^T] = 0 \quad (4.14)$$

Onde, $E[.]$ mostra o valor esperado, $\delta(t-\tau)$ é o delta de Dirac (impulso em $t = \tau$). As matrizes W e V são chamadas de intensidade de ruídos associados aos ruídos brancos gaussianos w e v respectivamente e são simétricas e positivas definidas:

$$W = W^T > 0$$

$$V = V^T > 0$$

A equação (4.12) é uma característica de ruído branco e significa que o valor esperado (média) é zero em qualquer instante de tempo. A equação (4.13) indica também uma característica do ruído branco: é completamente imprevisível já que é não-correlacionado para qualquer $t \neq \tau$. Por último, a equação (4.14) indica que os ruídos w e v não estão correlacionados entre si.

O filtro de Kalman dá recursivamente a estimativa x_o do estado que é:

$$E[x(t) - x_o(t)] = 0$$

Onde $\int_0^\infty \|x(t) - x_o(t)\|^2 dt$ minimiza a estimativa do estado ou seja o erro tem energia mínima.

A estimativa x_o é propagada no tempo resolvendo a equação diferencial:

$$\dot{x}_o(t) = Ax_o(t) + Bu(t) + L_K [y(t) - Cx_o(t)]$$

Sendo L_K o ganho óptimo do observador (ou filtro de Kalman), este é dado por:

$$L_K = PC^T V^{-1}$$

Onde P é uma matriz simétrica positiva definida que cumpre a seguinte equação algébrica de Riccati do filtro, dada por:

$$PA^T + AP + BWB^T - PC^T V^{-1} CP = 0$$

Na prática, as intensidades W e V dos ruídos não são conhecidas. Além disso, o ruído no sensor não é branco, isto apenas se trata de uma aproximação. Assim estas matrizes são consideradas como parâmetros de projecto para obter uma boa resposta do filtro de Kalman. Normalmente pode-se considerar:

$$W = I$$

$$V = \eta I$$

onde η é o parâmetro do projecto que deverá ser escolhida pelo projectista. Um possível critério para escolher a constante η é considerando que quanto menor seja este parâmetro, para uma mesma matriz B_{sismo} , menor será a capacidade de rejeição de ruído do observador e mais rápida a sua resposta.

4.5.2 Filtro de Kalman de tempo discreto

Uma vez que o problema de controlo em tempo discreto LQG é semelhante ao de tempo contínuo, a descrição abaixo mostra as equações matemáticas. O sistema em tempo discreto para equações lineares,[43]e[16], é dado por::

$$x_{i+1} = A_i x_i + B_i u_i + w_i$$

$$y_i = C_i x_i + D_i u_i + v_i$$

Aqui i representa o índice de tempo discreto e w_i , v_i representam o tempo discreto do ruído branco Gaussiano e as matrizes de covariância respectivamente W_i, V_i . A função de custo a ser minimizada é dada por:

$$J = E \left(x_N^T F x_N + \sum_{i=1}^{N-1} x_i^T Q_i x_i + u_i^T R_i u_i \right),$$

$$F \geq 0, \quad Q_i \geq 0, \quad R_i > 0,$$

A formulação que resolve o problema do controlador LQG no tempo discreto é a seguinte:

$$\hat{x}_{i+1} = A_i \hat{x}_i(t) + B_i u_i + L_{K_i} [y_i - C_i \hat{x}_i], \quad \hat{x}_o = E(x_o)$$

$$u_i = -K_i \hat{x}_i$$

O ganho do filtro de Kalman é dado por:

$$L_{K_i} = A_i P_i C_i^T (C_i P_i C_i^T + V_i)^{-1}$$

Onde P_i é determinado através da equação diferencial de Riccati, matriz que corre para a frente no tempo,

$$P_{i+1} = A_i (P_i - P_i C_i^T (C_i P_i C_i^T + V_i)^{-1} C_i P_i) A_i^T + W_i, P_i = E(x_o x_o^T)$$

O ganho de realimentação é igual a matriz:

$$L_i = (B_i^T S_{i+1} B_i + R_i)^{-1} B_i^T S_{i+1} A_i$$

Onde S_i é determinada pela seguinte equação diferencial, matriz de Riccati que corre para trás no tempo,

$$S_i = A_i^T (S_{i+1} - S_{i+1} B_i (B_i^T S_{i+1} B_i + R_i)^{-1} B_i^T S_{i+1}) A_i + Q_i$$

Capítulo 5

Implementação de um sistema de controlo

Neste capítulo, desenvolveu-se uma simulação do modelo AMD em MATLAB e SIMULINK. A partir da representação em espaço de estados foi possível caracterizar o comportamento da estrutura sem controlo e com controlo. O dimensionamento dos controladores baseou-se na avaliação das respostas obtidas pela simulação de forma a atenuar as vibrações da estrutura, através do método LQR. Neste método, teve-se de variar as matrizes de ponderação Q e R de modo a que a estrutura apresente um comportamento aceitável. Ainda neste capítulo realizou-se o dimensionamento do observador de estados através do filtro de Kalman.

5.1 Dimensionamento de Controladores

O dimensionamento dos controladores tiveram como suporte algumas especificações dinâmicas que permitem definir quantitativamente a resposta da estrutura. As especificações consideradas para o dimensionamento dos controladores refere-se ao tempo de estabelecimento, t_s , quando se impõem deslocamentos iniciais aos pisos da estrutura, sendo esses de 10 mm . Assim, considerou-se a seguinte matriz que diz respeito às condições iniciais impostas.

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0.01 & 0.01 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

O tempo de estabelecimento é de extrema importância e corresponde ao intervalo de tempo abrangido entre o instante inicial e o instante em que a resposta não ultrapassa um valor especificado em torno da posição de equilíbrio. Cada piso apresenta um t_s de 1.5 s , o deslocamento máximo admitido para o 1º piso é de 3.0 mm e para o 2º piso de 2.5 mm .

5.1.1 Análise da Controlabilidade

O primeiro passo num dimensionamento de um controlador é saber se o sistema é ou não controlável. Para isso, tal como mencionado na subsecção 4.1.1, é necessário obter a matriz de controlabilidade(4.1), sendo esta a seguinte:

$$C_b = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B & A^4B & A^5B \end{bmatrix}$$

$$C_b = \begin{bmatrix} 0 & 3.00 & -56.10 & 780.67 & -9.59 \times 10^3 & 2.91 \times 10^5 \\ 0 & 0 & 0 & -414.40 & 7.74 \times 10^3 & 3.52 \times 10^5 \\ 0 & -0.96 & 17.96 & 401.23 & -9.10 \times 10^3 & -5.44 \times 10^5 \\ 3.00 & -56.10 & 780.67 & -9.59 \times 10^3 & 2.91 \times 10^5 & -7.97 \times 10^6 \\ 0 & 0 & -414.40 & 7.74 \times 10^3 & 3.52 \times 10^5 & -7.26 \times 10^6 \\ -0.96 & 17.96 & 401.23 & -9.10 \times 10^3 & -5.44 \times 10^5 & 1.21 \times 10^7 \end{bmatrix}$$

A característica de C_b é igual a 6 ou seja igual ao número de estados, assim o sistema é completamente controlável.

5.1.2 Simulação em SIMULINK do AMD

Para avaliar o comportamento da estrutura foi desenvolvido um programa em SIMULINK que permite fazer simulações do funcionamento do sistema de controlo a partir das equações de espaço de estado. Para o dimensionamento do controlador considera-se que todos os estados são mensuráveis, logo a matriz de saída C será igual à matriz identidade I e as matrizes de estado e de entrada mantém-se as mesmas enunciadas na subsecção 3.4.3. Na Figura 5.1 está representado o diagrama de blocos usado no programa para a simulação do sistema.

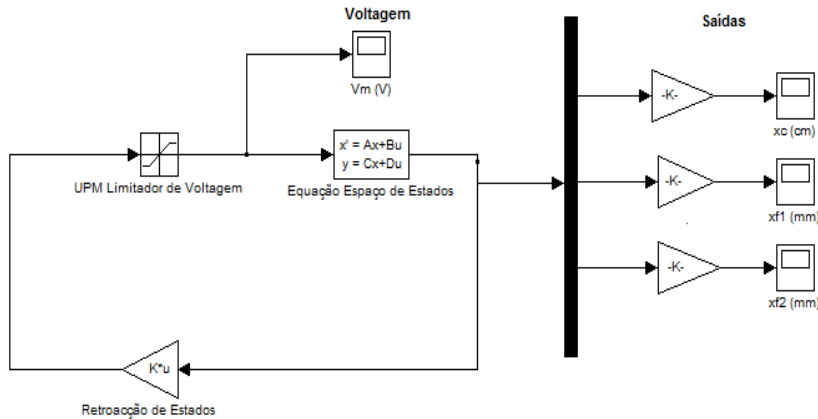


Figura 5.1: Diagrama de blocos para o sistema AMD

Os valores iniciais das variáveis de estado são introduzidos no bloco de Equação Espaço de Estados que permite resolver as equações de estado retornando os valores das variáveis mensuráveis do sistema. A variável de entrada u corresponde à diferença de potencial V_m a injectar no motor do AMD. Na Figura 5.2 está representado o diagrama de blocos de Espaço de Estados.

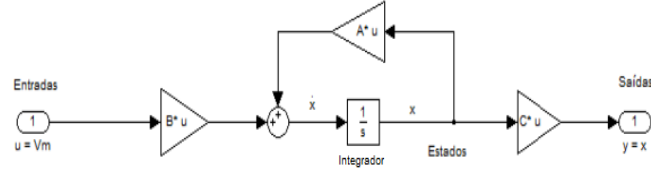


Figura 5.2: Diagrama de blocos de Espaço de Estados

5.1.3 Dimensionamento do controlador LQR

O dimensionamento do controlador LQR tem como propósito determinar a matriz de ganho K que minimize a função de custo J (equação 4.4) que relaciona o vector de estado e o vector de entrada do sistema. O problema está em determinar as matrizes Q e R de maneira a que o sistema respeite as especificações dinâmicas de cada piso descritas anteriormente. A determinação das matrizes Q e R é um procedimento demorado e trabalhoso que, normalmente, é feito por tentativa e erro. Por forma a facilitar este método admitem-se matrizes diagonais pois assim as componentes do estado e do controlo são afectadas individualmente, o que torna mais fácil o seu ajuste e a interpretação dos resultados. O sistema em análise tem seis variáveis de estado e uma variável de entrada, assim resultam as seguintes matrizes:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{66} \end{bmatrix} \quad R = [r_{11}]$$

Para a obtenção da função de custo J substitui-se as matrizes Q e R na equação (4.4), obtendo-se assim:

$$J = \int_0^\infty x_c^2(t)q_{11} + x_{f1}^2(t)q_{22} + x_{f2}^2(t)q_{33} + x_c^2(t)q_{44} + \dot{x}_{f1}^2(t)q_{55} + \dot{x}_{f2}^2(t)q_{66} + u^2(t)r_{11}dt$$

Através da expressão acima, pode-se ver que as variáveis de estado e de entrada estão relacionadas directamente com os elementos da diagonal principal das matrizes de ponderação. Neste método é necessário de experimentar algumas iterações onde se variam os pesos relacionados com as variáveis de estado e de entrada. Isto porque inicialmente não se conhece

quais os pesos a aplicar nas matrizes por forma a conduzir às características dinâmicas desejadas.

Inicialmente começou-se por considerar $Q = I$ e $R = I$ (caso 1), ao optar por estas matrizes não se dá importância à redução da oscilação da estrutura ou do esforço de controlo. De seguida deixou-se os mesmos pesos considerados no caso 1 e variou-se os pesos relativos ao esforço de controlo.

Posteriormente, tendo em conta os valores máximos admissíveis dos deslocamentos dos pisos, determinaram-se os pesos consoante os valores máximos admissíveis para cada variável. Como não se pretende amplificação dos deslocamentos dos pisos, os estados x_{f1} e x_{f2} não devem ultrapassar os 3 mm e os 2.5 mm . Considerou-se, e dada a limitação física, que os deslocamentos do AMD não devem exceder 8 cm e que este tipo de solicitação não deverá obrigar a diferença de potencial V_m , superior a 13 Volts . Em relação aos estados \dot{x}_c , \dot{x}_{f1} e \dot{x}_{f2} , admitiram-se os valores máximos verificados na resposta do sistema não controlado,[14].

Como primeira iteração a matriz Q obteve-se substituindo os valores da Tabela 5.1 nas equações (4.6) e (4.7) e considerando $R = 1$.

Tabela 5.1: Valores máximos admissíveis para as variáveis do sistema

Variável	Valor máximo admissível
x_c	8 cm
x_{f1}	3 mm
x_{f2}	2.5 mm
\dot{x}_c	0.15 m/s
\dot{x}_{f1}	0.20 m/s
\dot{x}_{f2}	0.20 m/s
V_m	13 Volts

Os restantes casos de estudo tiveram como base o caso 5 calculado através da regra de Bryson,[1], mas considerando como diferença de potencial V_m máxima de 3 Volts (caso 6), variando os diferentes valores dos pesos relativos a cada variável de estado e a cada variável de entrada.

Na Tabela 5.2 apresentam-se os valores dos pesos relativos a cada variável de estado e à variável de entrada para cada caso estudado. De seguida através de tabelas apresentam-se os valores das frequências próprias da estrutura e dos amortecimentos para o 1º modo e 2º modo de vibração, bem como a interpretação desses valores no comportamento da estrutura.

Tabela 5.2: Matriz de ponderação Q e R para os vários casos

	Q_{11}	Q_{22}	Q_{33}	Q_{44}	Q_{55}	Q_{66}	R_{11}
Caso 1	1	1	1	1	1	1	1
Caso 2							0.10
Caso 3							0.001
Caso 4							1000
Caso 5	156	110000	160000	44	25	25	1
Caso 6							0.10
Caso 7							0.001
Caso 8							1000
Caso 9				100			0.10
Caso 10				10000			
Caso 11					100		
Caso 12					10000		
Caso 13						100	
Caso 14						10000	
Caso 15	1560						
Caso 16		10000					
Caso 17			16000				

Tabela 5.4: Comparação dos valores máximos das variáveis do sistema para os vários casos

	$ x_{f1} $ (mm)	%	$ x_{f2} $ (mm)	%	$ x_c $ (cm)	%	V_m (Volts)	%
Não Controlado	8.80	0	9.10	0	7.70	0	0	0
Caso 1	8.80	0	9.00	0	0.80	0	0.033	0
Caso 2	8.75	+0.57	8.65	-4	0.95	+16	0.20	+83.50
Caso 3	8.25	-6.25	7.40	-18	1.15	+30	2.10	+98
Caso 4	8.75	-0.57	8.25	-8	0.75	-6	0.0007	-98
Caso 5	6.60	0	6.20	0	2.10	0	4.60	0
Caso 6	5.40	-18	5.00	-19	2.80	+26	8.50	+46
Caso 7	4.90	-26	4.30	-31	3.20	+34	13.00	+65
Caso 8	8.75	+33	9.00	+31	0.95	-55	0.022	+99.50
Caso 9	5.20	-3.70	5.10	+2	2.40	-14	7.30	-14
Caso 10	8.90	+39	8.00	+37.50	0.40	-86	0.60	-93
Caso 11	5.20	-3.70	5.00	0	2.80	0	9.40	+10
Caso 12	4.10	-24	3.80	-24	8.30	+66	13.00	+35
Caso 13	5.20	-3.70	4.90	-2	2.80	0	8.80	+3
Caso 14	5.30	-1.85	4.00	-20	7.20	+61	13.00	+35
Caso 15	5.20	-3.70	5.00	0	4.30	+35	4.80	-44
Caso 16	5.40	0	5.10	+2	7.10	+61	5.40	-36.50
CASO 17	5.10	-5.56	5.20	+4	2.30	-14	7.40	-13

Tabela 5.3: Características dinâmicas dos modos de vibração do sistema não controlado e controlado em rad/s e em percentagem.

	Não Controlado		Caso 1		Caso 2		Caso 3		Caso 4		Caso 5	
	f	ξ	f	ξ	f	ξ	f	ξ	f	ξ	f	ξ
Modos de vibração												
1º Modo	10.70	6.24	10.70	6.36	10.60	7.16	10.2	9.45	10.70	6.24	10.80	35.60
2º Modo	32.30	1.25	32.30	1.25	32.30	3.52	31.40	11.6	32.30	1.25	32.30	12.00

	Caso 6		Caso 7		Caso 8		Caso 9		Caso 10		Caso 11	
	f	ξ	f	ξ	f	ξ	f	ξ	f	ξ	f	ξ
Modos de vibração												
1º Modo	10.40	48.40	10.40	50.90	10.70	64.20	10.40	33.00	10.30	34.00	10.40	48.80
2º Modo	31.40	20.70	30.80	23.00	32.30	13.20	31.50	15.10	31.70	16.50	31.70	22.10

	Caso 12		Caso 13		Caso 14		Caso 15		Caso 16		Caso 17	
	f	ξ	f	ξ	f	ξ	f	ξ	f	ξ	f	ξ
Modos de vibração												
1º Modo	6.86	59.80	10.40	49.00	6.98	69.94	69.94	44.10	10.70	35.30	10.10	35.90
2º Modo	46.30	46.30	30.60	22.60	21.50	31.40	31.40	20.50	30.70	19.10	32.30	13.40

Com base nos resultados dos casos 1-4 pode-se ver que as frequências próprias da estrutura mantiveram-se, o amortecimento dos modos de vibração da estrutura não alteraram significativamente com a diminuição do parâmetro R (Tabela 5.3). As posições dos pólos no plano-complexo vão se deslocando para a parte negativa, isto conforme se diminuiu o parâmetro R , sendo assim o sistema estável (Figura 5.3). Pelo contrário se aumentar-se este parâmetro vê-se que os pólos deslocam-se para a parte positiva do plano-complexo, tornando assim o sistema instável (Figura 5.3). Nestes casos pode-se ver que diferença de potencial V_m vai aumentando conforme o parâmetro R diminuiu, logo existe uma diminuição na resposta da estrutura (Tabela 5.4). No caso 4 vê-se conforme existe um aumento do parâmetro R a diferença de potencial V_m diminuiu, aumentando assim a resposta (Tabela 5.4). Nas Figuras 5.4a e 5.4b pode-se verificar o efeito da variação do parâmetro R na dinâmica da estrutura a nível de frequências próprias e do amortecimento.

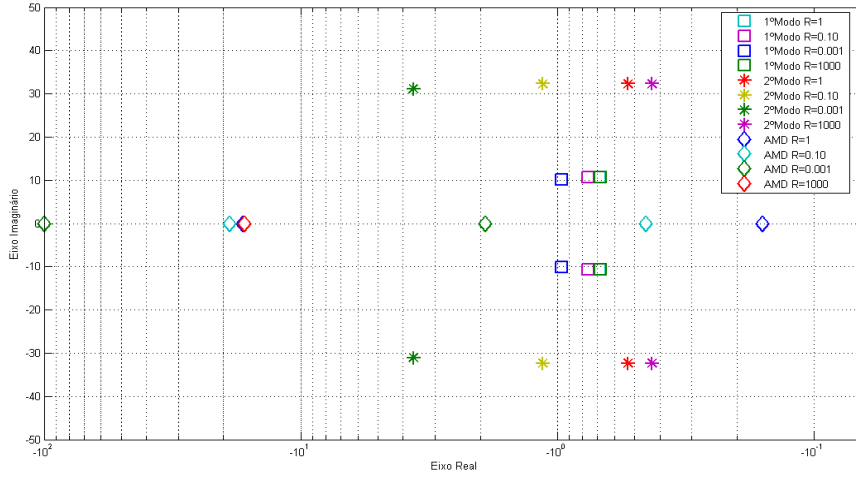
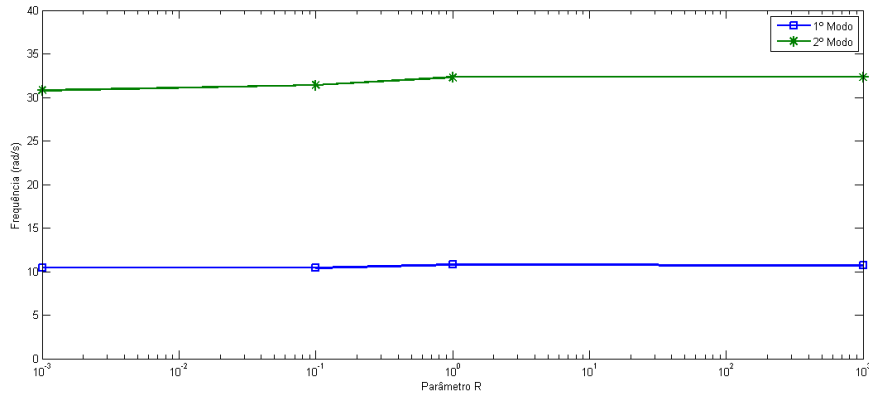
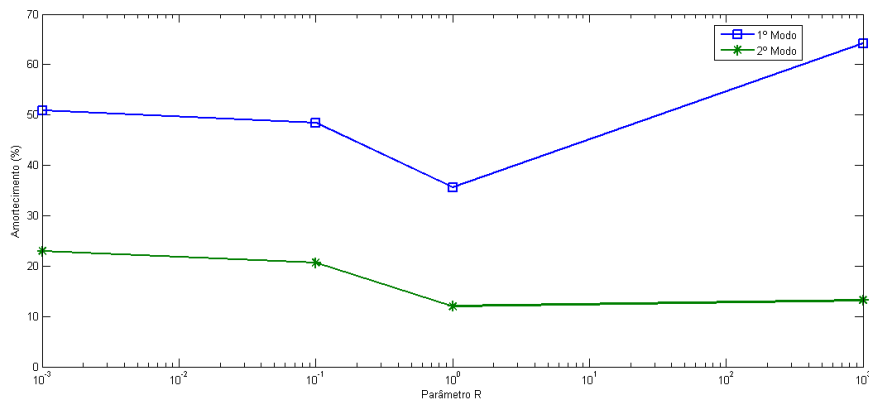


Figura 5.3: Variação dos pólos do sistema em função do parâmetro R

(a) Efeito do parâmetro R nas frequências próprias da estrutura caso - 5-8(b) Efeito do parâmetro R nos amortecimentos da estrutura - caso 5-8Figura 5.4: Efeito do parâmetro R na dinâmica da estrutura - caso 5-8

Analisando os resultados obtidos nos casos 5-8 (Tabela 5.3), concluiu-se que aumentando ou diminuindo o peso r_{11} relativo à diferença de potencial V_m permite conferir maior amortecimento à estrutura, sem uma alteração significativa das frequências próprias da estrutura, sendo o mais desejado a nível do controlo na área da engenharia civil. Contudo, a diferença de potencial despendida para atenuar as vibrações atingiu valores altos para o tipo de acção imposta a quando existe um aumento do parâmetro R (Figura 5.5). No que diz respeito aos deslocamentos dos pisos mostrados na Figura 5.6 vê-se que, diminuindo o parâmetro R , o deslocamento dos pisos diminui, e aumentando o parâmetro R (caso 8), os deslocamentos dos pisos aumentam. No que diz respeito ao deslocamento do AMD acontece precisamente ao contrário do que aconteceu aos deslocamentos dos pisos. O caso 8 apresenta o mesmo comportamento do sistema não controlado. O caso 7 apresenta uma redução de cerca de 45% no deslocamento do primeiro piso e de 52% no deslocamento do segundo piso em relação ao sistema não controlado (Figura 5.6).

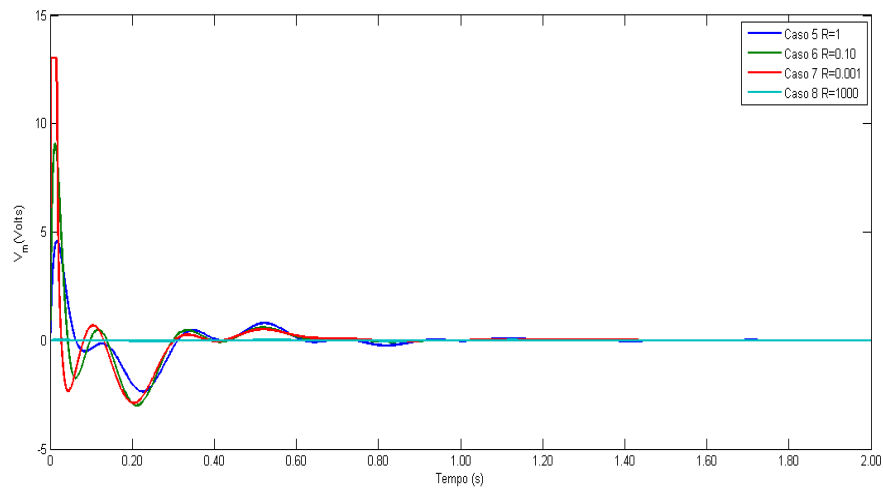


Figura 5.5: Efeito do parâmetro R no esforço de controle V_m

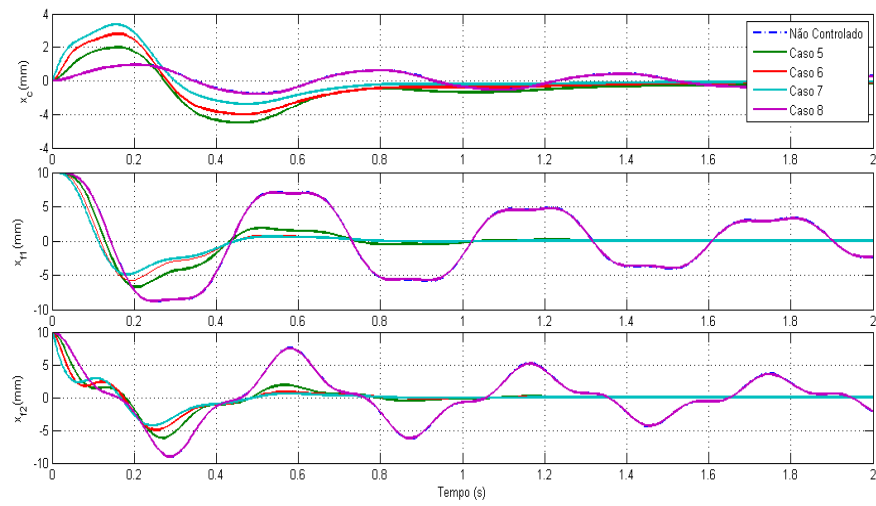


Figura 5.6: Deslocamentos do AMD e dos pisos para condições iniciais não nulas

Aumentando o q_{44} referente ao valor do peso relativo ao estado \dot{x}_c (caso 9 e caso 10), pode ver que as frequências próprias da estrutura mantêm-se praticamente as mesmas e o amortecimento dos modos de vibração diminuem em relação ao caso 6 (Tabela 5.3). Através da Tabela 5.4 pode-se dizer que o deslocamento do AMD diminuiu, o deslocamento primeiro piso aumentou 40% e do segundo piso 37.50% em relação ao caso 6. A diferença de potencial despendida para amortecer os deslocamentos diminuiu 93% em relação a caso 6 (Tabela 5.4).

Com o aumento do q_{55} referente ao valor do peso relativo ao estado \dot{x}_{f1} (caso 11 e caso 12) pode-se ver que existe uma variação das frequências próprias da estrutura, as do 1º modo diminuem e as do 2º modo aumentam, e que o amortecimento aumenta para os dois modos de vibração (Tabela 5.3), estes valores não são os mais desejados visto que existiu uma modificação das frequências próprias. Através do caso 12 da Tabela 5.4 pode-se dizer que o deslocamento do AMD aumentou ultrapassando os valores admissíveis e os deslocamentos dos pisos diminuíram 24% em conformidade com o caso 6. A diferença de potencial despendida aumentou atingindo o valor máximo admissível, fazendo com que possa existir saturação do sinal de controlo (caso 12 da Tabela 5.4).

Aumentando o q_{66} referente ao valor do peso relativo ao estado \dot{x}_{f2} (caso 13 e caso 14) vê-se que existe variação das frequências próprias e do amortecimento da estrutura, assim conclui-se que o amortecimento para ambos os modos aumentou. As frequências próprias da estrutura diminuem como consta no caso 14 da Tabela 5.3. Através do caso 14 da Tabela 5.4 conclui-se que o deslocamento do AMD aumentou e os deslocamentos dos pisos diminuíram 2% para o primeiro piso e 20% para o segundo piso em relação ao caso 6 (Figura 5.7). A diferença de potencial despendida para amortecer os deslocamentos dos pisos aumentou bastante atingindo 13 Volts (caso 14 da Tabela 5.4).

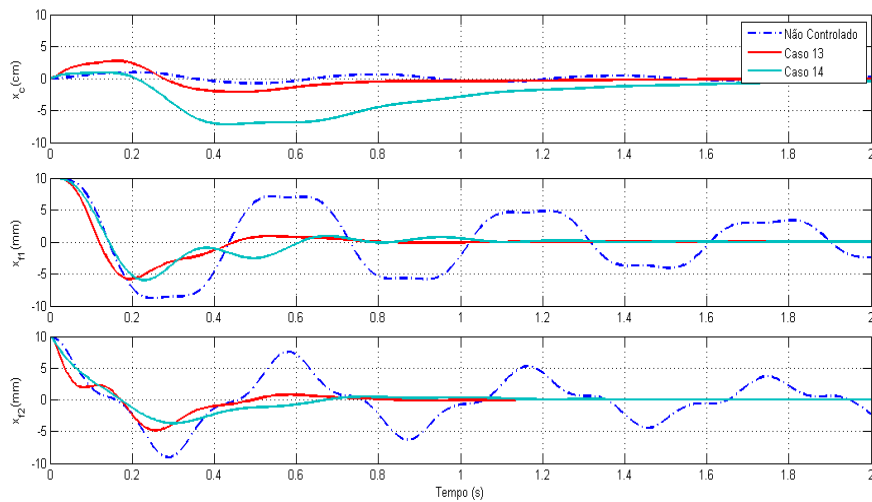


Figura 5.7: Deslocamento do AMD e dos pisos para condições iniciais não nulas referentes ao efeito q_{66}

Com o aumento do q_{11} referente ao valor do peso relativo ao estado x_c (caso 15), as frequências próprias da estrutura referentes ao 1º modo aumentam e as do 2º modo não se alteram em relação ao caso 6, como se pode ver no caso 15 (Tabela 5.3). Através do caso 15 da Tabela 5.4 pode-se expressar que o deslocamento do AMD aumentou, o deslocamento do primeiro piso diminuiu 4% e o deslocamento do segundo piso mantém-se o mesmo do caso 6. A diferença de potencial despendida diminuiu 44% (Tabela 5.4). Este caso apresenta valores não desejados para qualquer estrutura de engenharia civil, isto visto que existiu uma alteração significativa das frequências próprias da estrutura.

De seguida, com a diminuição do q_{22} referente ao valor do peso relativo ao estado x_{f1} (caso 16), as frequências próprias da estrutura do 1º modo tiveram um aumento pouco significativo e as do 2º modo diminuíram em relação ao caso 6, o amortecimento diminuiu para ambos os modos de vibração, como se pode ver no caso 16 da Tabela 5.3. Através do caso 16 da Tabela 5.4 pode-se dizer que o deslocamento do AMD aumentou, os deslocamentos dos pisos não apresentam quaisquer diferença expressiva em relação ao caso 6. A diferença de potencial despendida para amortecer os deslocamentos dos pisos diminuiu 36.5% em conformidade com o caso 6 (Tabela 5.4).

Por fim, com a diminuição do q_{33} referente ao valor do peso relativo ao estado x_{f2} (caso 17), as frequências próprias da estrutura do 1º modo tiveram uma diminuição pouco significativa e as do 2º modo aumentaram em relação ao caso 6, o amortecimento de ambos os modos diminuíram, como consta no caso 17 da Tabela 5.3. O deslocamento do AMD diminuiu, o deslocamento do primeiro piso diminuiu 5.56% , o deslocamento do segundo piso aumentou 4% e diferença de potencial despendida diminuiu 12.94% em relação ao caso 6 (Tabela 5.4).

Atendendo aos valores da Tabela 5.4, ao demonstrado na Figura 5.8 e ao analisado anteriormente, é possível concluir que o controlador obtido nos casos 6, 9 e 17 seriam os que teriam melhor desempenho, visto que reduz deslocamentos dos pisos, o deslocamento do AMD não ultrapassa os limites admissíveis, bem como a energia despendida. No domínio da frequência observa-se uma redução nos picos dos dois primeiros modos de vibração em relação ao sistema não controlado, pode-se dizer que quanto menor o amortecimento maior a magnitude (Figura 5.9). Também é importante dizer que, para estes três casos escolhidos, as frequências próprias da estrutura quase não se alteram em relação ao sistema de malha aberta, e pelo contrário, conseguiu-se um aumento significativo do amortecimento da estrutura, sendo no ramo da engenharia civil o desejável. Optou-se assim pelo controlador referido no caso 6 para a avaliação do comportamento da estrutura a quando uma solicitação sísmica.

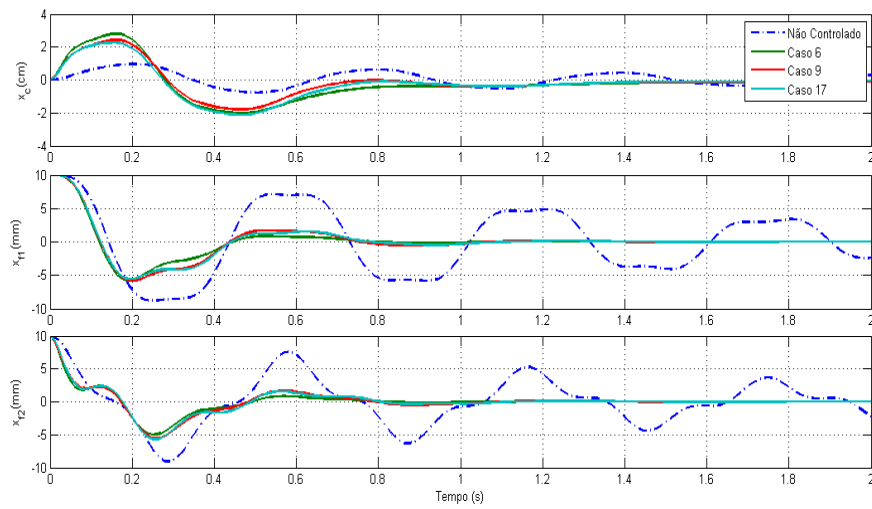


Figura 5.8: Deslocamento do AMD e dos pisos para condições iniciais não nulas

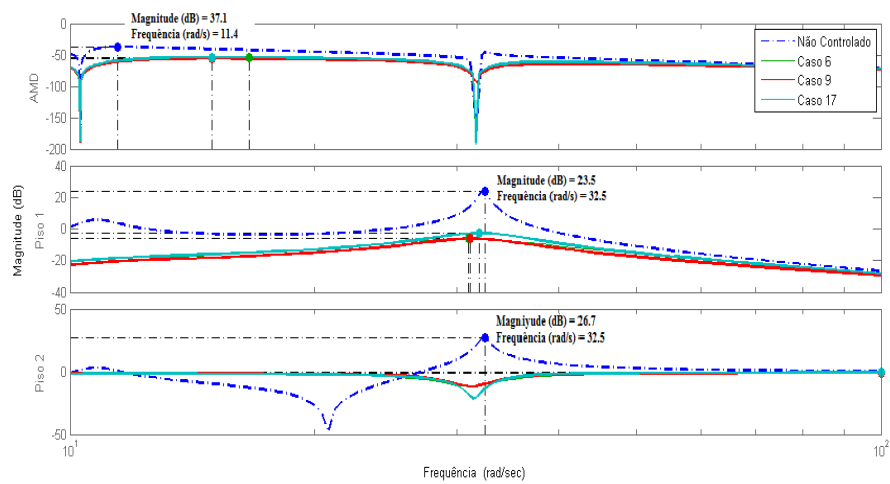


Figura 5.9: Função de resposta em frequência do sistema não controlado e controlado referente aos casos 6,9 e 17.

5.2 Dimensionamento do Observador de Estados

No dimensionamento do observador de estados teve-se em atenção que os sensores disponíveis apenas medem a posição do AMD e as acelerações dos dois pisos da estrutura. Assim, foi necessário inserir na malha de retroacção um observador capaz de estimar todos os estados a partir do vector de saída. Através de um modelo desenvolvido em SIMULINK conseguiu-se dimensionar o observador, com o objectivo de determinar os estados estimados. Os estados estimados foram comparados com os valores que se obteriam caso os estados fossem medidos mediante sensores. Na Figura 5.1 demonstra o diagrama de blocos geral usado no programa para a simulação do sistema.

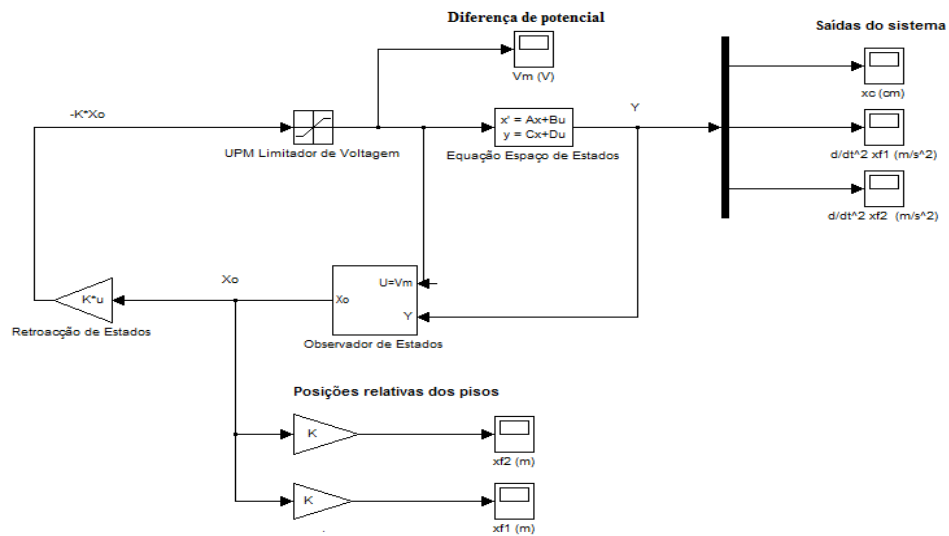


Figura 5.10: Diagrama de blocos para o sistema AMD-2

O bloco da Equação Espaço de Estados contém o diagrama de blocos da Figura 5.11 que permite resolver as equações do movimento, retornando os valores das variáveis mensuráveis (x_c , \ddot{x}_{f1} e \ddot{x}_{f2}) do sistema. A variável de entrada u corresponde à diferença de potencial V_m a injectar no motor do AMD e as matrizes A , B , C e D são as determinadas anteriormente.

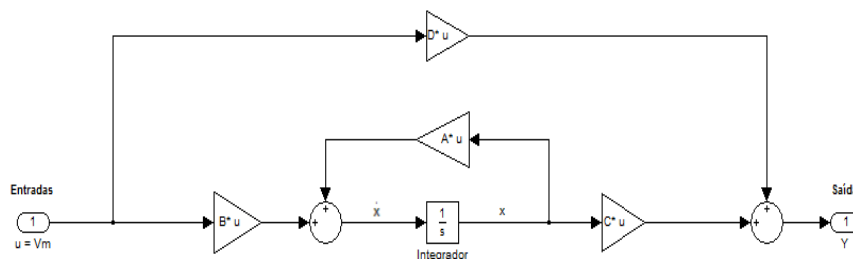


Figura 5.11: Diagrama de blocos de Espaço de Estados

De seguida como o controlo efectua-se por retroacção de estados estimados por um observador, assim o bloco Observador de Estados recebe os valores das saídas Y do bloco de Equação Espaço de Estados e das acções externas. Na Figura 5.12 pode se observar que as saídas do observador X_o são os valores dos estados que por sua vez são multiplicados pelo ganho do bloco de Retroacção de Estados, ou seja pela matriz ganho K do controlador.

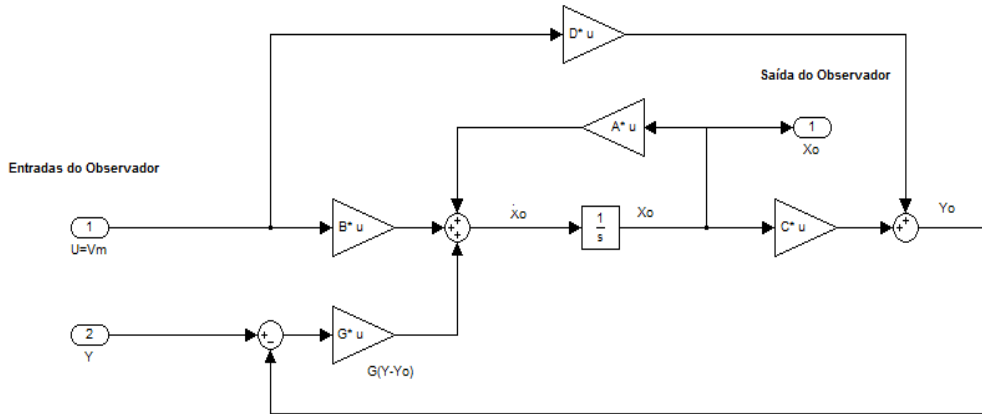


Figura 5.12: Diagrama de blocos do Observador de Estados

O sinal de saída do bloco de Retroacção de Estados corresponde à diferença de potencial a injectar no motor do AMD. O sistema possui ainda um UPM que é a unidade de alimentação que evita a saturação do sinal de controlo limitado, neste caso a 13 *Volts*.

5.2.1 Análise da Observabilidade

Os estados do sistema só podem ser estimados por intermédio de um observador de ordem completa, apenas se e só se o sistema for completamente observável. Para isso, tal como mencionado na subsecção 4.1.2 é necessário obter a matriz de observabilidade do sistema, sendo esta a seguinte:

$$O_b = \begin{bmatrix} C^T & C^T A^T & C^T (A^T)^2 & C^T (A^T)^3 & C^T (A^T)^4 & C^T (A^T)^5 \end{bmatrix}$$

$$O_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -431.03 & 431.03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 431.03 & -766.49 & 5.98 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -431.03 & 431.03 \\ 0 & 0 & 1.67 \times 10^3 & -111.80 & 431.03 & -766.49 \\ 0 & 0 & 278.43 & -18.69 & 0 & 0 \\ 0 & 3.71 \times 10^5 & -5.16 \times 10^5 & 2.58 \times 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & -5.16 \times 10^5 & 7.42 \times 10^5 & -2.50 \times 10^3 & 0 & 1.67 \times 10^3 \\ 0 & 0 & -5.20 \times 10^5 & 349.16 & 0 & 278.43 \\ 0 & 0 & 7.18 \times 10^5 & -4.82 \times 10^4 & 3.72 \times 10^5 & -5.16 \times 10^5 \\ 0 & 7.18 \times 10^5 & -1.97 \times 10^6 & 5.66 \times 10^4 & -5.16 \times 10^5 & 7.42 \times 10^5 \\ 0 & 1.20 \times 10^5 & -1.16 \times 10^5 & -4.86 \times 10^3 & 0 & -5.20 \times 10^3 \\ 0 & -3.83 \times 10^8 & 5.42 \times 10^8 & -2.18 \times 10^6 & 0 & 7.18 \times 10^5 \\ 0 & 5.42 \times 10^8 & -7.76 \times 10^8 & 3.38 \times 10^6 & 7.18 \times 10^5 & -1.97 \times 10^6 \\ 0 & -2.24 \times 10^6 & 2.64 \times 10^6 & 5.97 \times 10^4 & 1.20 \times 10^5 & -1.16 \times 10^3 \\ 0 & 3.10 \times 10^8 & -1.16 \times 10^9 & 4.52 \times 10^7 & -3.83 \times 10^8 & 5.42 \times 10^8 \\ 0 & -1.16 \times 10^9 & 2.76 \times 10^9 & -7.50 \times 10^7 & 5.42 \times 10^8 & -7.76 \times 10^8 \end{bmatrix}$$

A característica de O_b é igual a 6 ou seja igual ao número de estados, assim o sistema é completamente observável.

5.2.2 Dimensionamento do observador via LQG

Para o dimensionamento do observador de estados recordou-se o referido na subsecção 4.3, ou seja, um problema deste tipo é formulado como um problema de optimização estocástica, dado por:

$$J = E \left(x^T(t_f) F x(t_f) + \int_0^{t_f} x^T(t) Q(t) x(t) + u^T(t) R(t) u(t) dt \right), F \geq 0, \quad Q(t) \geq 0, \quad R(t) > 0$$

O controlador que resolve o problema de controlo do tipo LQG é especificado pelas seguintes equações:

$$\dot{x}_o(t) = A x(t) + B u(t) + L_K (y(t) - C x_o(t)), x_o(0) = E(x(0))$$

$$u(t) = -K x(t)$$

Em primeiro lugar considerou-se a matriz de ponderação Q e R do método LQR demonstrada no caso 6 da subsecção 5.1.3 que apresenta um melhor comportamento da estrutura, obtendo-se assim o ganho de realimentação óptimo do controlador K . De seguida, já no dimensionamento do filtro de Kalman calculou-se a matriz L_K que é o ganho do filtro de Kalman. Em cada tempo t o filtro de Kalman gera estimativas $x_o(t)$ do Estado $x(t)$ usando as medidas passadas e as saídas. O ganho de Kalman L_K é calculado a partir de matrizes A , C . Foi necessário fazer algumas iterações onde se variam o peso relacionado com o sinal de distúrbio (ou ruído de excitação de estado) w por forma que o vector estimado se aproxime o mais rápido do vector de estado. O sinal de ruído no sensor v gerado em cada sensor, também se foi variando. Este estudo foi realizado para condições iniciais não nulas e para a função impulso unitário. Abaixo apresentam-se os resultados apenas dos observadores que estimam melhor o vector de estado.

• **Caso 1**

A matriz de ganho do observador L_K foi obtida através do programa realizado em MATLAB disponível no Apêndice C. Neste caso considerou-se o sinal de distúrbio $w = [0.001]$ e $v = 1\%$ para os sensores, isto para condições iniciais não nulas, obtendo assim a matriz L_K seguinte:

$$L_K = \begin{bmatrix} 0.0005 & 0.0000 & 0.0001 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0001 & -0.0010 & -0.0012 \\ 0.0000 & 0.0001 & 0.0001 \\ 0.0000 & 0.0004 & 0.0007 \end{bmatrix}$$

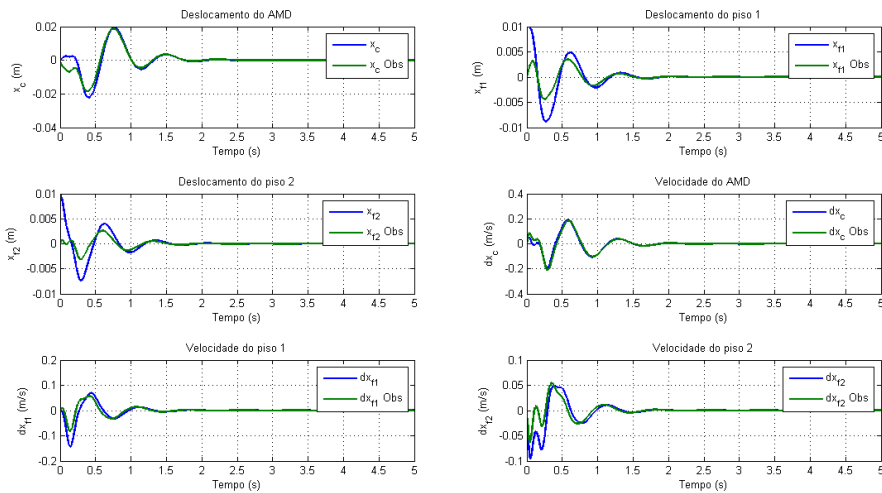


Figura 5.13: Comparação entre o vector de estados e sua estimativa - caso 1

- Caso 2

Neste caso considerou-se o sinal de distúrbio $w = [1000]$ e $v = 1\%$ em cada sensor para a função impulso unitário, obtendo assim:

$$L_K = \begin{bmatrix} 0.0120 & 0.0005 & 0.0000 \\ -0.0003 & -0.0001 & -0.0000 \\ -0.0003 & -0.0000 & -0.0000 \\ 0.0719 & 0.0030 & -0.0031 \\ -0.0006 & 0.0002 & -0.0000 \\ -0.0005 & 0.0006 & 0.0010 \end{bmatrix}$$

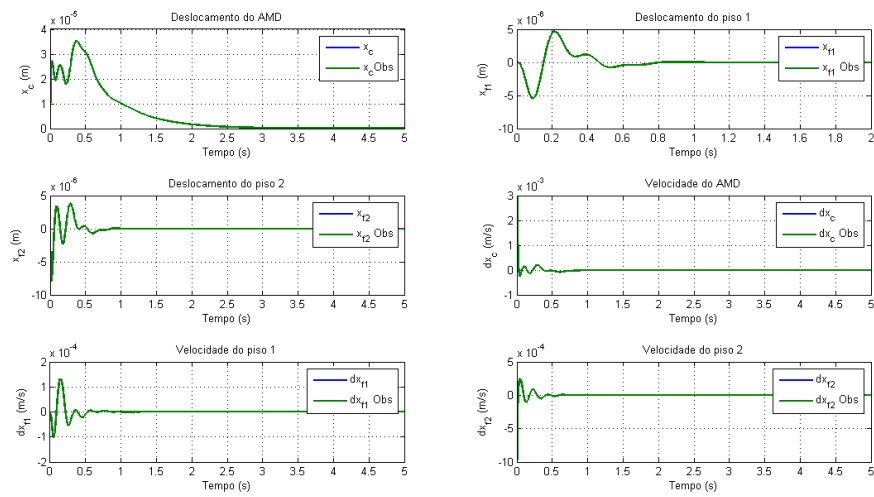


Figura 5.14: Comparação entre o vector de estados e sua estimativa - caso 2

- Caso 3

Neste caso considerou-se o sinal de distúrbio o mesmo do caso 2, alterando o valor de $v = 5\%$ para o sensor relativo ao AMD e $v = 1\%$ para os restantes sensores, obtendo assim a matriz L_K seguinte:

$$L_K = \begin{bmatrix} 0.0078 & 0.0037 & -0.0000 \\ -0.0001 & -0.0001 & -0.0000 \\ -0.0001 & -0.0001 & 0.0000 \\ 0.0306 & 0.0240 & -0.0031 \\ -0.0001 & 0.0001 & 0.0000 \\ -0.0001 & 0.0005 & 0.0010 \end{bmatrix}$$

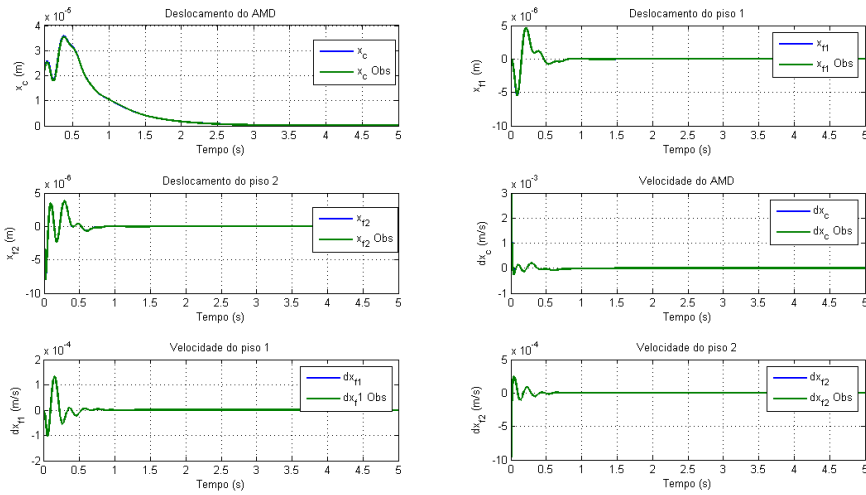


Figura 5.15: Comparação entre o vector de estados e sua estimativa - caso 3

- Caso 4

Neste caso considerou-se o sinal de distúrbio $w = [0.10]$, alterando o valor de $v = 1\%$ para o sensor relativo ao AMD e $v = 5\%$ para os restantes sensores, isto para condições iniciais não nulas, obtendo assim a matriz L_K :

$$L_K = \begin{bmatrix} 0.0042 & 0.0001 & 0.0001 \\ -0.0000 & -0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & -0.0000 \\ 0.0114 & -0.0013 & -0.0015 \\ 0.0002 & 0.0002 & -0.0001 \\ 0.0002 & 0.0005 & 0.0009 \end{bmatrix}$$

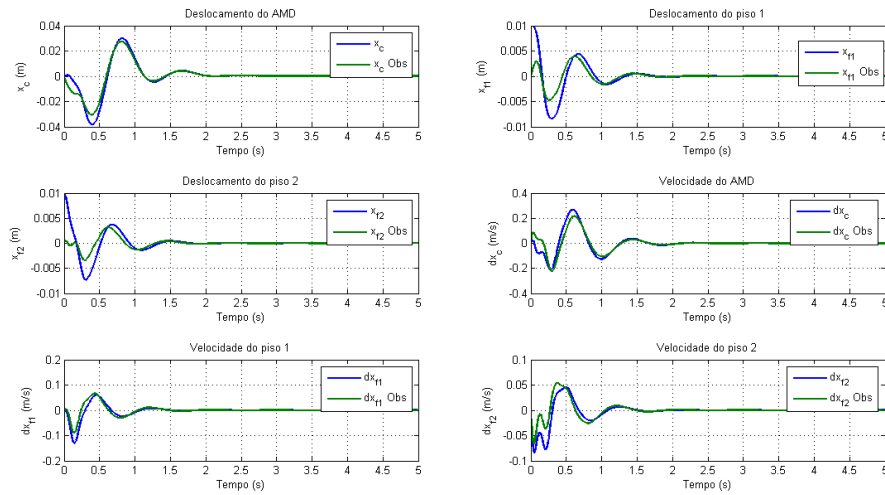


Figura 5.16: Comparação entre o vector de estados e sua estimativa - caso 4

Através das Figuras 5.14, 5.16, 5.15 e 5.16 optou-se pelo observador do caso 2, isto porque estima bastante bem os estados. O vector de estado apresenta diferenças imperceptíveis em relação à sua estimativa e se aproxima de zero de uma forma rápida. Nos gráficos da Figura 5.17 também se pode concluir que no que diz respeito às saídas, o deslocamento do carro x_c apresenta valores bastante baixos. No que diz respeito às acelerações de cada piso e ao tempo de estabelecimento apresentam valores bastante reduzidos.

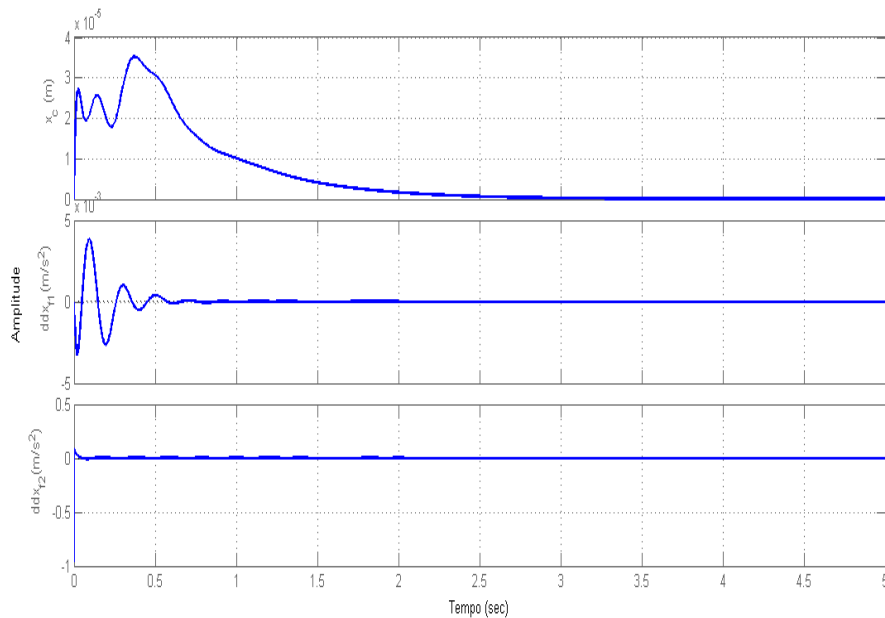


Figura 5.17: Saídas do sistema observado

Capítulo 6

Modelo dinâmico e interacção do sistema de controlo

O modelo dinâmico incorpora a estrutura e a dinâmica do actuador. A eficácia de controlo apresentada será avaliada por simulações realizadas em MATLAB e SIMULINK. Pretende-se avaliar o comportamento da estrutura e a eficiência do controlo dimensionado no Capítulo 5 quando solicitada por sismos.

6.1 Representação em Espaço de Estados a uma solicitação de base com AMD fixo

Para a representação em espaço de estados começou-se por considerar nulo o amortecimento da estrutura, o que na verdade nunca acontece em estruturas reais. Em estruturas reais quando surgem deslocamentos elevados, existem várias secções da estrutura a atingir a cedência, fazendo assim que exista um aumento da dissipação de energia e com isso um aumento do amortecimento da estrutura, [10]. O coeficiente de amortecimento dos modos de vibração de estruturas como pórticos de pisos rígidos sujeitos a acções sísmicas é cerca de 1% a 2% , [31]. Neste caso assumiu-se $\xi_1 = \xi_2 = 0.02$, obteve-se a matriz de amortecimento, C_s , pelo método do amortecimento de Rayleigh.

$$C_s = a_0 M_s + a_1 K_s$$

Os coeficientes a_0 e a_1 da equação anterior foram calculados da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{w_i} & w_i \\ \frac{1}{w_j} & w_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{12.8} & 12.8 \\ \frac{1}{33.6} & 33.6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.37 \\ 0.0009 \end{bmatrix}$$

Segundo as equações do movimento e da matriz de amortecimento C_s descreveu-se o comportamento da estrutura através da equação matricial seguinte:

$$M_s \ddot{q}(t) + C_s \dot{q}(t) + K_s q(t) = J_{sismo} \ddot{x}_b$$

Como a aceleração de base é a única entrada no sistema é possível obter a equação de estado, sendo essa dada por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_{sismo} \ddot{x}_b(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + D_{sismo} \ddot{x}_b(t)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M_s^{-1}K_s & -M_s^{-1}C_s \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ M_s^{-1}J_s \end{bmatrix} u(t); \quad u(t) = \ddot{x}_b(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{f1} \\ \dot{x}_{f2} \\ \ddot{x}_{f1} \\ \ddot{x}_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -431.03 & 431.03 & -0.758 & 0.388 \\ 431.03 & -677.34 & 0.388 & -0.980 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{f1} \\ x_{f2} \\ \dot{x}_{f1} \\ \dot{x}_{f2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{x}_b$$

A equação de saída da representação em espaço de estados é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} x_{f1} \\ x_{f2} \\ \ddot{x}_{f1} \\ \ddot{x}_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -431.03 & 431.03 & -0.758 & 0.388 \\ 431.03 & -677.34 & 0.388 & -0.980 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{f1} \\ x_{f2} \\ \dot{x}_{f1} \\ \dot{x}_{f2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{x}_b \quad (6.1)$$

6.1.1 Simulação em SIMULINK

Com a finalidade de testar a eficiência do sistema de controlo, simulou-se o sistema em SIMULINK, admitiu-se a existência de sensores que medem as posições (x_{f1} e x_{f2}) e as acelerações (\ddot{x}_{f1} e \ddot{x}_{f2}) dos pisos. Desta forma a equação de saída da representação em espaço de estados é dada pela equação 6.1. A Figura 6.1 demonstra o diagrama de blocos geral do modelo com AMD fixo usado para simular os vários sismos em estudo, neste caso o exemplo abaixo refere-se à aceleração de base do sismo de Kobe.

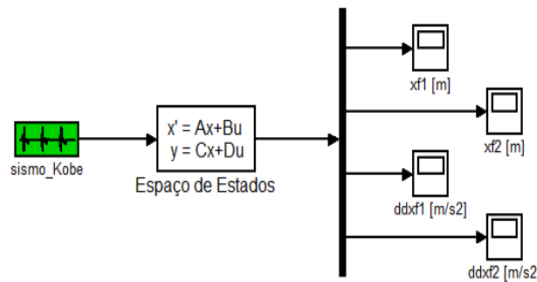


Figura 6.1: Diagrama de blocos da simulação a uma solicitação de base(Sismo de Kobe) com AMD fixo

6.2 Representação em Espaço de Estados a uma solicitação de base com AMD

As equações de movimento no espaço de estados para uma solicitação de base do sistema controlado, representam-se da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_{sismo}\ddot{x}_b(t) \quad (6.2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + D_{sismo}\ddot{x}_b(t) \quad (6.3)$$

Pela substituição dos valores dos parâmetros do sistema, que se encontram tabelados no Apêndice B, resulta a seguinte equação de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{x}_{f1} \\ \dot{x}_{f2} \\ \ddot{x}_c \\ \ddot{x}_{f1} \\ \ddot{x}_{f2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 278.43 & -18.65 & 0 & 0 \\ 0 & -431.03 & 431.03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 431.03 & -766.49 & 5.98 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ x_{f1} \\ x_{f2} \\ \dot{x}_c \\ \dot{x}_{f1} \\ \dot{x}_{f2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.00 \\ 0 \\ -0.96 \end{bmatrix} V_m(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{x}_b$$

A equação de saída é dada por:

$$\begin{bmatrix} x_c(t) \\ \ddot{x}_{f1}(t) \\ \ddot{x}_{f2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -431.03 & 431.03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 431.03 & -766.49 & 5.98 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ x_{f1}(t) \\ x_{f2}(t) \\ \dot{x}_c(t) \\ \dot{x}_{f1}(t) \\ \dot{x}_{f2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.96 \end{bmatrix} V_m(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ddot{x}_b(t)$$

6.2.1 AMD passivo

Quando o sistema de controlo se encontra desligado, a parcela relativa à diferença de potencial V_m , a aplicar ao motor é nula.

A equação de estado é dada por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_{sismo}\ddot{x}_b(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + D_{sismo}\ddot{x}_b(t)$$

Apesar de não existir controlo continua a existir alguma dissipação de energia por atrito do pinhão do carro e pelos coeficientes de amortecimento $\xi_1 = 6.24\%$ e $\xi_2 = 1.25\%$ que confere amortecimento passivo à estrutura. A capacidade de amortecimento passivo será quantificada e comparada com a configuração do modelo com AMD fixo e com o AMD activo.

6.2.2 AMD activo

O sistema descrito pelas equações 6.2 e 6.3 é accionado por uma diferença de potencial V_m , de modo que a força de controlo aplicada possa reduzir as vibrações da estrutura. O controlo é realizado através da retroacção de estados:

$$u(t) = -Kx(t)$$

Os ganhos K foram obtidos na subsecção 5.1.3, admitindo que todos os estados estão disponíveis por medição. De facto os estados foram estimados a partir do ganho do filtro de Kalman L_k dimensionado na subsecção 5.2.2, segundo a seguinte equação:

$$\dot{x}_o(t) = Ax_o(t) + BV_m(t) + B_{sismo}\ddot{x}_b(t) + L_K(y(t) - y_o(t)) \quad (6.4)$$

6.2.2.1 Simulação em SIMULINK

Através do programa em SIMULINK e dos diagramas de blocos representado na Figura 6.2 conseguiu-se simular a actuação dos vários sismos em estudo.

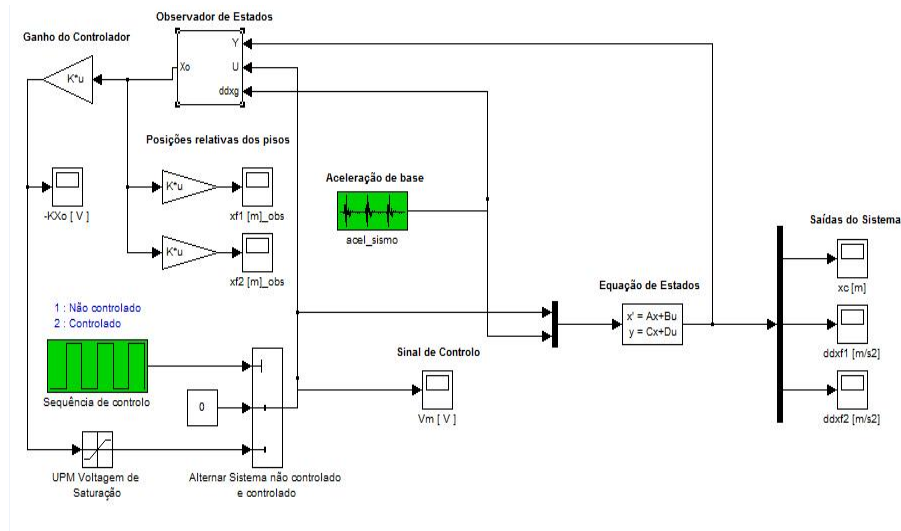


Figura 6.2: Diagrama de blocos da simulação para uma solicitação de base

Neste caso o sistema passa a ter duas entradas e como tal procederam-se alterações no diagrama de blocos de espaço de estados. Como se pode ver pela Figura 6.3 acrescentaram-se dois ganhos relativos às matrizes B_{sismo} e D_{sismo} .

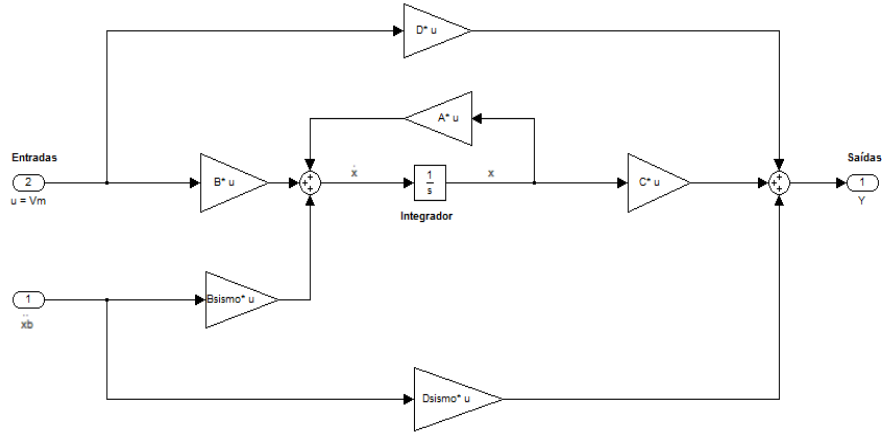


Figura 6.3: Diagrama de blocos de espaço de estados da simulação para uma solicitação de base

Este programa pretende simular um sistema de controlo que se baseia nas medições das acelerações de base. Assim para o caso do AMD activo o observador passa a ter como entradas $V_m(t)$ e $\ddot{x}_b(t)$, sendo este considerado como um ruído branco Gaussiano e o vector de saída $y(t)$. Logo as equações (6.5) e (6.6) caracterizam a dinâmica do observador.

$$\dot{x}_o(t) = Ax_o(t) + BV_m(t) + B_{sismo}\ddot{x}_b(t) + L_K(y(t) - y_o(t)) \quad (6.5)$$

$$y_o(t) = Cx_o(t) + DV_m(t) + D_{sismo}\ddot{x}_b(t) \quad (6.6)$$

A Figura 6.4 representa o diagrama de blocos que permite obter a estimativa dos estados em SIMULINK.

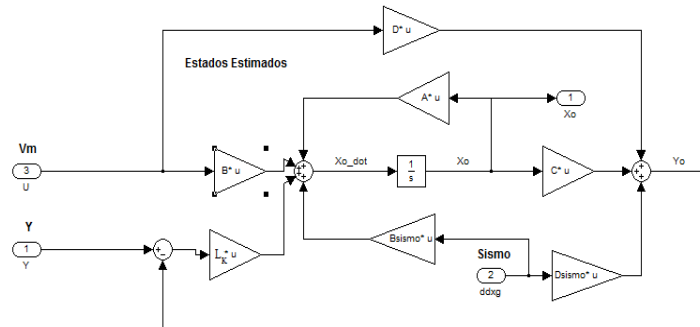


Figura 6.4: Diagrama de blocos do observador de estados da simulação para uma solicitação de base

Para o caso em que o AMD é passivo as equações (6.5) e (6.6) são iguais ao controlo com AMD activo, com excepção que apenas existe uma entrada $\ddot{x}_b(t)$ e o vector de saída $y(t)$.

6.2.3 Apresentação de Resultados com AMD fixo/AMD passivo

Através do programa em SIMULINK (Figuras 6.2 a 6.4) é possível estudar a resposta da estrutura sem controlo e com controlo passivo quando solicitada por vários sismos. De seguida é apresentado a aceleração de base do sismo de Chichi e a sua resposta em acelerações e deslocamentos, os restantes resultados correspondentes aos vários sismos estudados encontram-se na Tabela 6.1 e no Apêndice D.

6.2.3.1 Sismo de Chichi

O sismo de Chichi ocorreu no dia 21 de Setembro de 1999 pelas 01:47 horas locais, com o seu epicentro na cidade de Chichi (Taiwan), registando uma magnitude de 7.6 na escala de Richter,[38]. Na Figura 6.5 está representado o sinal de perturbação correspondente ao sismo de Chichi.

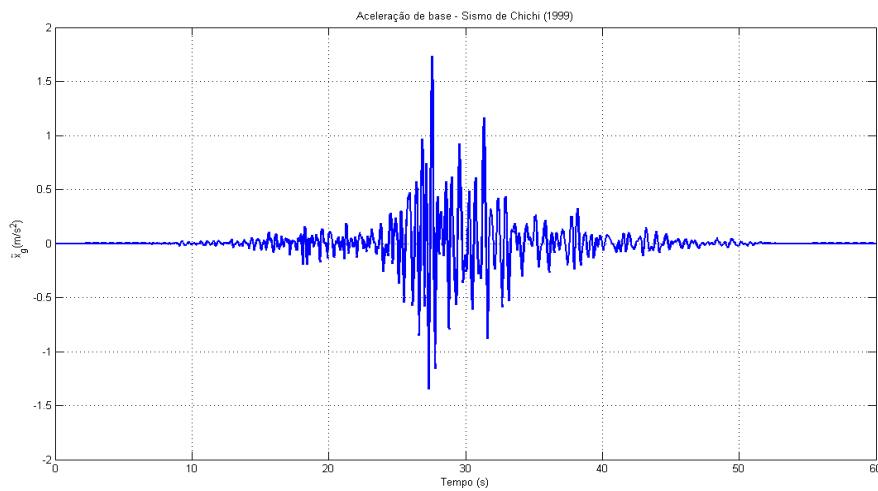


Figura 6.5: Sinal equivalente a aceleração de base do sismo de Chichi

6.2. REPRESENTAÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS A UMA SOLICITAÇÃO DE BASE COM AMD 89

Na Figura 6.6 permite comparar as acelerações relativas obtidas para ambos os pisos.

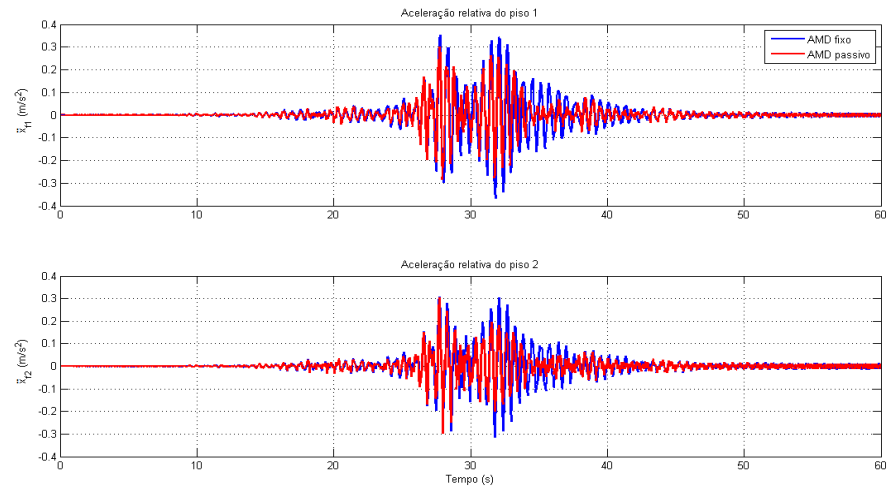


Figura 6.6: Aceleração relativa dos pisos - Sismo de Chichi

Os deslocamentos relativos dos pisos estão dispostos gráficamente através da Figura 6.7 .

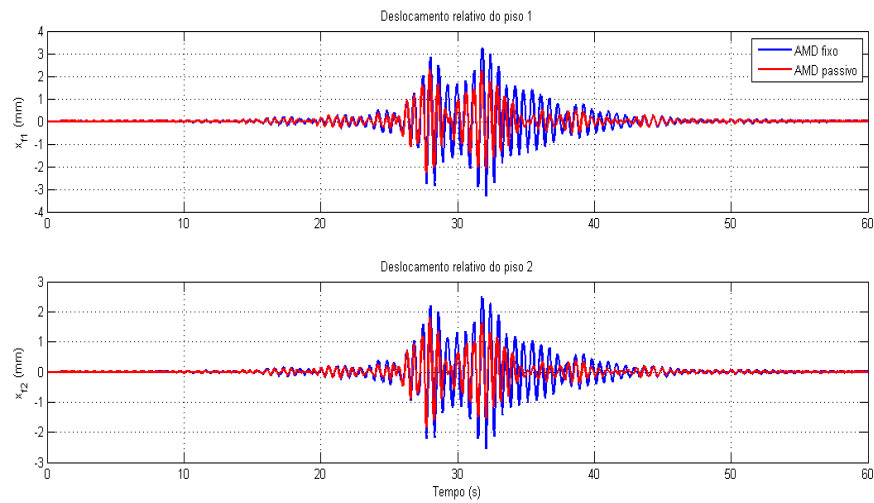


Figura 6.7: Deslocamentos relativos dos pisos - Sismo de Chichi

6.2.4 Apresentação de Resultados com AMD passivo/AMD activo

Na implementação do controlo LQG são usados dois ganhos, do controlador obtidos para o caso 6 e os ganhos do observador para o caso 2. O sismo é considerado como ruído branco estacionário. Através do programa SIMULINK e dos diagramas de blocos representados nas Figuras 6.3 e 6.4 foi possível simular o comportamento da estrutura e avaliar a eficiência do controlo. Abaixo é apenas apresentada a resposta das acelerações, dos deslocamentos e da diferença de potencial referente ao sismo de Chichi. Os restantes resultados dos vários sismos estudados encontram-se na Tabela 6.1 e no Apêndice E.

6.2.4.1 Sismo de Chichi

A Figura 6.8 permite comparar as acelerações relativas obtidas para ambos os pisos.

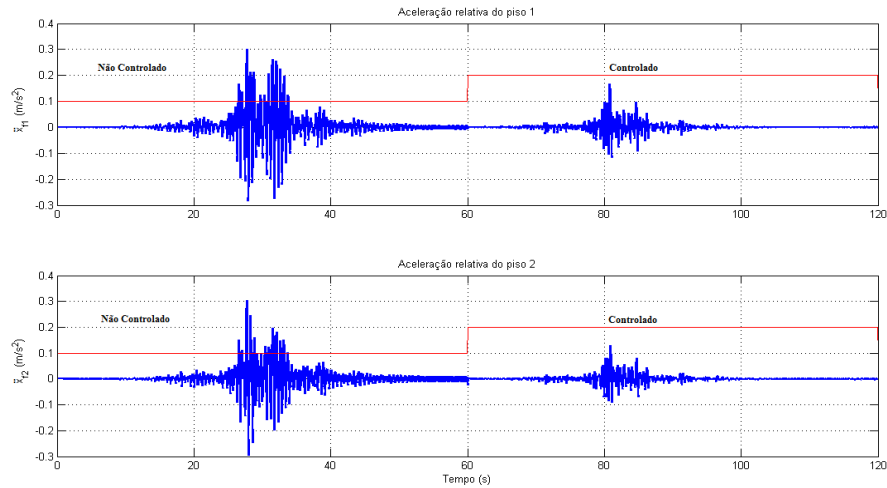


Figura 6.8: Acelerações relativas dos pisos via LQG - Sismo de Chichi

Os deslocamentos relativos dos pisos e do AMD estão dispostos graficamente através da Figura 6.9.

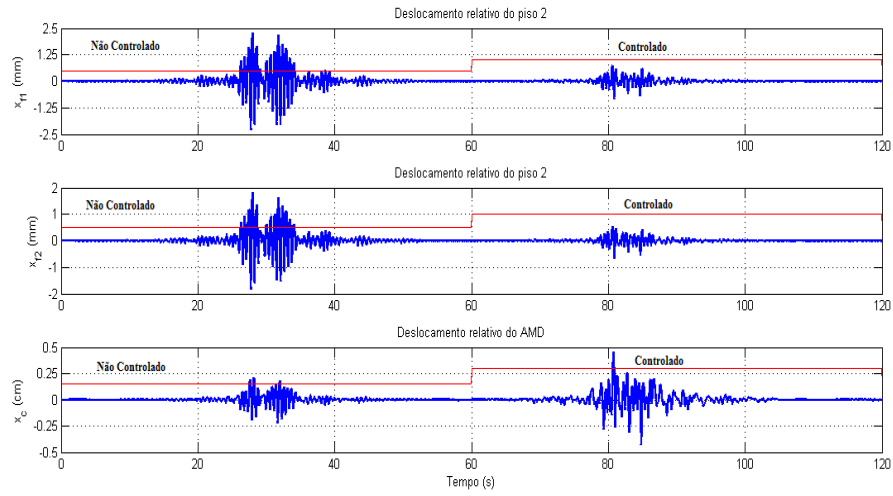


Figura 6.9: Deslocamentos relativos dos pisos e do AMD via LQG - Sismo de Chichi

Para avaliar o comportamento do controlador, a Figura 6.10 demonstra os registos da voltagem dispendida para absorver as vibrações.

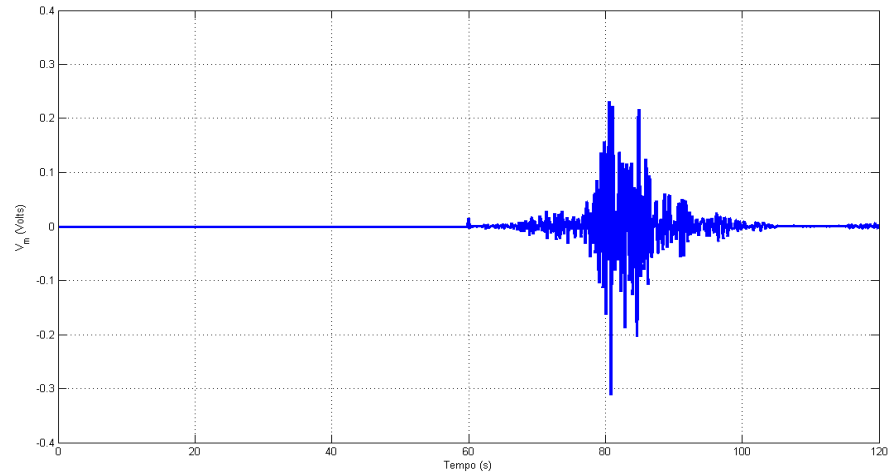


Figura 6.10: Diferença de potencial via LQG - Sismo de Chichi

6.3 Comparação de Resultados

Tendo em atenção os resultados apresentados na Tabela 6.1 e nos Apêndices D e E, concluiu-se que, existe uma redução eficaz da resposta estrutural para as várias acções sísmicas estudadas.

Assim através da Figura 6.7 e da Tabela 6.1, viu-se que existe uma diferença de 28% no que diz respeito à redução dos deslocamentos dos pisos, entre o sistema com AMD fixo e

AMD passivo. Examinando os gráficos das figuras do Apêndice D e os valores da Tabela 6.1, pode-se dizer que as acelerações dos pisos do sistema com AMD passivo são menores que as acelerações dos sistemas com AMD fixo.

A partir dos gráficos da Figura 6.9 e dos valores da Tabela 6.1 com AMD activo via LQG, existe uma redução de 64% dos deslocamentos dos pisos em relação ao sistema com AMD passivo. Para o deslocamento do AMD a Figura E.2 (Apêndice E) demonstra que o seu valor máximo é de 6.8 cm , não ultrapassando este os limites admissíveis, e quanto ao sistema com AMD passivo existe uma falta de rigidez do AMD para que este consiga regressar à posição inicial. A Figura E.3 (Apêndice E) apresenta que a diferença de potencial máxima V_m , a aplicar ao motor do AMD é de 8.5 Volts , não excedendo assim os limites do actuador (13 Volts).

De seguida através dos valores da Tabela 6.1 concluiu-se que o controlo activo via LQG, para o sismo de Kobe é mais eficiente na redução dos deslocamentos dos pisos quando comparado com o controlo via alocação de pólos,[35], este passa por mudar o posicionamento dos pólos para que as especificações dinâmicas sejam respeitadas. Conseguiu-se assim uma redução nos deslocamentos de 58% para ambos os pisos em relação ao AMD passivo. Para as acelerações dos pisos (Tabela 6.1) existe uma redução de 45% para o primeiro piso via LQG e de 61% via alocação de pólos,[35].

Tabela 6.1: Valores máximos obtidos através da simulação dos vários sismos

Sismo de Kobe											
Sistema	$ x_{f1} $ (mm)	%	$ x_{f2} $ (mm)	%	$ \ddot{x}_{f1} $ (m/s ²)	%	$ \ddot{x}_{f2} $ (m/s ²)	%	$ x_c $ (cm)	%	V_m (Volts)
AMD fixo	53.00		43.00		11.20		12.50				
AMD passivo	43.00	19	33.00	23	14.50	23	14.50	14	4.30		
AMD activo-LQG	18.00	58	14.00	58	8.00	45	6.70	54	6.80	37	8.5
AMD activo[35]	22.70	47	16.10	51	8.50	41	5.70	61			
Sismo de Friuli											
AMD fixo	1.80		1.40		0.18		0.14				
AMD passivo	1.30	28	0.95	32	0.14	22	0.11	21	0.14		
AMD activo-LQG	0.54	59	0.39	59	0.05	64	0.038	65	0.32	56	0.16
Sismo de Chichi											
AMD fixo	3.20		2.50		0.35		0.32				
AMD passivo	2.30	28	1.80	28	0.30	14	0.31	3	0.21		
AMD activo-LQG	0.83	64	0.65	64	0.16	47	0.14	55	0.45	53	0.31
Sismo de Northridge											
AMD fixo	3.40		2.70		0.90		0.80				
AMD passivo	2.70	21	2.50	7	0.85	6	0.83	4	0.27		
AMD activo-LQG	1.60	41	1.30	48	0.60	29	0.45	46	0.85	68	0.65

Capítulo 7

Conclusões

Na presente dissertação, estudou-se o controlador activo AMD (“Active Mass Damper”) para um modelo de um pórtico de dois pisos, quando solicitado por uma acção sísmica, de forma a atenuar as vibrações nas estruturas de engenharia civil.

Para atingir os objectivos, foi utilizada uma estratégia de controlo moderno à formulação de espaço de estados. O método de controlo estudado tem como intuito de alcançar determinado desempenho com o menor gasto de energia possível, através do controlo óptimo LQR, e de um observador de estados denominado por filtro de Kalman. Para o dimensionamento do controlador via LQR, efectuaram-se várias estimações nas matrizes de ponderação Q e R de modo a que o sistema adquira as especificações dinâmicas desejadas. É de salientar que o sistema de controlo LQR pode apresentar limitações no que respeita à diferença de potencial, pois existe a possibilidade de saturação do sinal de controlo. Também se pode acrescentar que este método apenas apresenta solução matemática, não levando a cabo as limitações físicas do problema em questão. Existe um aumento da diferença de potencial quando ocorrem valores de amortecimento da estrutura mais elevados. O LQR mostrou-se menos robusto aos ruídos de medida e depende da disponibilidade da realimentação de todos os estados na malha de controlo.

É possível recorrer a um controlador do tipo LQR, quando se tem como ponto de partida os mais variados objectivos de controlo, tal como a limitação dos valores dos deslocamentos máximos, das velocidades máximas, do tempo que a estrutura demora a atingir um determinado intervalo de oscilação ou, até mesmo, os valores dos ganhos envolvidos.

No estudo do sistema AMD permitiu verificar que existem alguns problemas inerentes ao dimensionamento de sistemas de controlo. Contudo, neste caso de estudo por ser uma estrutura com apenas dois pisos, não houve problemas relativos à controlabilidade, ou seja, todos os estados podiam ser alterados por intermédio da acção de controlo. Nas estruturas reais, os métodos de controlo através da realimentação de estados necessitam da execução de um observador de estados, este observador foi realizado pelo método do regulador linear

Gaussiano (LQG). O observador depende da dinâmica da estrutura quando se procede ao seu dimensionamento, ou seja, é de extrema importância que o observador adquira uma dinâmica rápida, para isso a dinâmica do erro deve-se aproximar de zero de uma forma célere, para que os valores usados na retroacção sejam fiáveis. Visto que nem todos os estados se apresentavam disponíveis através das medições dos sensores instalados, houve a necessidade de compreender o funcionamento de um observador de ordem completa. O algoritmo usado para o dimensionamento do observador LQG, não necessita que todos os estados estejam disponíveis para realimentação, basta que os estados disponíveis sejam observáveis.

O primeiro passo foi determinar o ganho óptimo do controlador LQR supondo que todos os estados estão disponíveis. Para a determinação do ganho óptimo do controlador recorreu-se à determinação das matrizes de ponderação Q e R , feito por tentativa e erro, verificou-se assim que este procedimento é demorado e trabalhoso. A escolha destas matrizes de ponderação influencia não só a estabilidade como a rapidez do sistema. De seguida, através do filtro de Kalman foi possível estimar estes estados, reduzindo ainda o efeito de ruído nas medidas, tornando assim o controlador mais robusto às incertezas, mas por vezes pode não ser suficientemente robusto. Depois de dimensionado o controlador e o observador, pretendeu-se avaliar o comportamento da estrutura e a eficiência do controlo quando solicitada por vários sismos. Percebeu-se que o controlador dimensionado era eficaz na redução da resposta estrutural, assim obteve-se uma resposta rápida e um aumento do amortecimento da estrutura. Analisando a resposta aos vários sismos conseguiu-se uma redução máxima dos deslocamentos dos pisos de 64% e no mínima de 28%. Para o deslocamento do AMD verificou-se que o seu valor máximo é de 6.8 cm, não ultrapassando os limites admissíveis. No que diz respeito às acelerações dos pisos verificou-se uma redução de 29% para o pior caso e de 65% para o melhor caso. A diferença de potencial máxima despendida para atenuar as vibrações foi de 8.5 Volts, não excedendo assim os limites do actuador. Através do método LQG existiu uma redução na resposta estrutural em maior percentagem, principalmente a nível dos deslocamentos dos pisos, quando comparado com o método da alocação de pólos usado no controlo do sismo de Kobe, [35]. O estudo realizado na presente dissertação permitiu ainda perceber as dificuldades pertencentes à execução de um sistema de controlo de vibrações.

Para desenvolvimentos futuros nesta área, será importante realizar a simulação tendo em atenção a não-linearização do sistema e também a realização de testes experimentais de forma a validar o dimensionamento realizado. Não podemos descurar o tempo de atraso entre as medições das respostas e as acção de controlo, ou seja, as medições de resposta não podem ser accionadas no mesmo instante que a acção de controlo. A eficiência deste tipo de controlador também deverá ser testada em modelos com um maior número de pisos, bem como implementação em pequenas estruturas reais, como edifícios ou pontes pedonais, procurando sempre manter a exequibilidade e bom senso exigidos neste tipo de solução. Para permitir exactidão dos resultados obtidos poderão utilizar-se outras estratégias de dimensionamento de controladores.

Bibliografia

- [1] A.E.Bryson e Y.C.Ho (1975). *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control*. Butterworth.
- [2] A.Nishitani e Inoue, Y. (2001). Overview of the application of active and semiactive control to building structures in japan. *Earthquake engineering and structural dynamics*, vol.30:1565–1574.
- [3] A.Tewari (2002). *Modern Control Design with MATLAB and SIMULINK*. Wiley.
- [4] Azevedo, J.; Guerreiro, L. (2007). *Current Status of Seismic Isolation and Energy Dissipation and Applications for Buildings, Bridges and Viaducts, in Portugal*. 10th World Conference on Seismic Isolation, Energy Dissipation and Active Vibrations Control of Structures.
- [5] B.C.Kuo (2003). *Automatic Control Systems*. Wiley.
- [6] Brazil, A.; Joseph, L. P. D. S. T. (2006). *Designing High Rises for Wind Performance*. Structures Congress, St. Louis, Missouri, USA.
- [7] Brown, R. G. e Hwang, P. Y. C. (1997). *Introduction to random signals and applied Kalman filtering*. John Wiley and Sons.
- [8] Caetano, E. (1992). *Identificação Experimental de Parâmetros Dinâmicos em Sistemas Estruturais*. Masters thesis, FEUP.
- [9] Casciati, F.; Magonette, G. M. F. (2006). *Technology of Semiactive Devices and Applications in Vibration Mitigation*. John Wiley and Sons, Ltd.
- [10] Chopra, A. K. (1995). *Dynamics of Structures*. Prentice Hall.
- [11] C.M.R.Moutinho (2007). *Controlo de Vibrações em Estruturas de Engenharia Civil*. PhD thesis, FEUP.
- [12] Consulting, Q. *AMD-2 User Manual*.
- [13] Consulting, Q. *AMD-2 Vibration Control Laboratory - Instructor Manual*.
- [14] Consulting, Q. *AMD-2 Vibration Control Laboratory - Student Handout*.

- [15] Corporation, T. (2001). *From Earthquake Resistance to Vibration Control-The Most Advanced Technology for Protecting Urban Functions*. Federal highway administration.
- [16] da Silva, L. A. (2007). *Filtros de Kalman no tempo e frequências discretos combinados com subtração espectral*. Masters thesis.
- [17] EERC (2007). *Structures Incorporating Tuned Mass Dampers*. North-Holland.
- [18] Gawronski, W. (1998). *Dynamics and control of structures: A modal approach*. Springer (New York).
- [19] Geipel, R. (1982). The case of friuli,italy the impact of an earthquake in a highly developed old culture: regional identity versus economic efficiency.
- [20] Green, L. (1994). *Limebeer: Linear Robust Control*. Prentice Hall.
- [21] G.W.Housner, e. (1997). Structural control: Past, present, and future. *Journal of Engineering Mechanics*, 123:897–971.
- [22] J.A.P.Ferreira (2006). *Hospital da Luz-Um Edifício com Isolamento Sísmico de Base*.
- [23] J.Lynch (1998). *Overview of Active Structural Control Systems at Kajima Corporation*. Department of Civil and Environmental Engineering, California.
- [24] Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transaction of the ASME-Journal of Basic Engineering*, 82:35–45.
- [25] Kareem, A.; Kijewski, T. T. Y. (1999). Mitigation of motion of tall buildings with recent applications. *Wind and Structures*, 2:201–251.
- [26] Kobori, T.; Takahashi, M. N. T. N. N. (1993). Seismic response controlled structure with active variable stiffness systems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 22:925–941.
- [27] Koike, Y.; Murata, T. T. K. M. M. K. T. T. Y. A. T. (1994). *Develpoment of V-shaped Hybrid Mass Damper and its Application to High-rise Buildings*. 1st World Conference on Structural Control.
- [28] Kwakernaak, H. e Sivan, R. (1972). *Linear Optimal Control Systems*, volume First Edition. Wiley-Interscience.
- [29] Luenberger, D. (1964). *Observing the State of a Linear System*, volume MIL-8. DIEEE Transactions Military Electronics.
- [30] M., A. (1971). The role and use of the stochastic linear-quadratic-gaussian problem in control system design. *IEEE Transaction on Automatic Control*, AC-16 (6):529–552.
- [31] Masashi Yamamoto, Satoru Aizawa, M. H. e Toyama, K. (2001). Practical applications of active mass dampers with hydraulic actuator. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 30(11):1697–1717.

- [32] N.W.Hagood e A.V.Floto (1991). Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of Sound and Vibration*, 146(2):243–268.
- [33] of Kobe, T. C. (2009-01-01). *The City of Kobe-The Great Hanshin-Awaji Earthquake: Statistics and Restoration Progress*.
- [34] Ogata, K. (1996). *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall, 3ª edição edição.
- [35] Rodrigues, L. F. G. (2011). *Estudo de estratégias de controlo activo de vibrações para um edificio de dois andares*. Masters thesis, FCT-Universidade Nova de Lisboa.
- [36] Santos, R. B. (2008). *Controle Ativo de Vibrações em Estruturas Flexíveis Utilizando Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)*. Masters thesis, UNESP.
- [37] Shimizu, K.; Teramura, A. (1994). *Development of Vibration Control System Using U-shaped Tank*. Proceedings of the 1st International Workshop and Seminar on Behavior of Steel Structures in Seismic Areas.
- [38] Solutions, R. M. (2000). *Risk Management Solutions-Event Report Chi-Chi, Taiwan Earthquake*.
- [39] Stutts, D. S. (2007). *Analytical Mechanics-Lagranges Equation and its Application*. PhD thesis.
- [40] Survey, U. S. G. (1994). *United States Geological Survey-Significant Earthquakes of the World*.
- [41] Survey, U. S. G. (1995). *United States Geological Survey-Significant Earthquakes of the World*.
- [42] Van Willigenburg L.G., D. K. W. (1999). Optimal reduced-order compensators for time-varying discrete-time systems with deterministic and white parameters. *European Journal of Control* 6, Automatica 35:247–256.
- [43] Van Willigenburg L.G., D. K. W. (2000). "numerical algorithms and issues concerning the discrete-time optimal projection equations". *European Journal of Control*, 6(1):93–100.
- [44] Villaverde, R. (1985). Reduction in seismic response with heavily-damped vibration absorbers. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 13:33–42.
- [45] Wang., Y. P. (2002). *Fundamentals of Seismic Base Isolation*. International training program for seismic design of building structures, sponsored by National Science Council, National Chiao-Tung University, Hsinchu, Taiwan.

Apêndices

Apêndice A

Representação matemática de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo

A.1 Definição da Transformada de Laplace

A transformada de Laplace tem enorme interesse no campo do controlo de sistemas dinâmicos, sendo um método bastante vantajoso na resolução de equações diferenciais. Devido ao facto de possibilitar a transformação de equações diferenciais no domínio do tempo em funções algébricas de uma variável complexa, facilmente manipuláveis e no domínio da frequência, é bastante utilizada na resolução deste tipo de problemas.

A transformada de Laplace é definida pela expressão seguinte, na qual s é a variável complexa arbitrária designada variável de Laplace, \mathcal{L} é o operador da transformada de Laplace e $F(s)$ é a transformada de Laplace da função $f(t)$ definida tal que $f(t) = 0$ para $t < 0$.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Esta transformada existe se o integral convergir, isto é se esta for contínua para todo o intervalo finito de $[0, \infty[$ e limitada por uma função do tipo exponencial, sendo essa

$$f(t) \leq Me^{at}$$

em que a e M são constantes reais convenientemente definidas considerando $t \in [0, \infty]$.

Recorrendo a este método, a equação diferencial linear será convertida numa equação algébrica em função de uma variável complexa s e, seguidamente, resolvida em ordem a essa mesma variável.

A.2 Transformada Inversa de Laplace

A transformada inversa de Laplace, permite obter, no domínio da variável dependente (normalmente o tempo), a solução de uma equação diferencial linear. Esta operação, indicada por \mathcal{L}^{-1} , é definida por

$$\mathcal{L}^{-1} = \{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

A equação anterior é válida para $t > 0$, sendo c uma constante real escolhida de tal forma que o caminho de integração seja paralelo ao eixo imaginário permanecendo deste a uma distância c , devendo c ser superior à parte real de todos os valores singulares de $F(s)$.

Apesar de ser possível utilizar a expressão de \mathcal{L}^{-1} para calcular esta transformada, este é um método bastante complexo e, por vezes, de difícil resolução. Contudo, existem tabelas com as expressões mais usuais que facilitam este processo. Muitas vezes, para se poder recorrer a estas tabelas, é necessário que as expressões obtidas para a transformada de Laplace estejam na forma de fracções parciais. Tal acontece quando a função, cuja transformada inversa de Laplace queremos saber, não aparece directamente tabelada. Assim, torna-se também possível tirar partido da propriedade de linearidade da transformada inversa de Laplace e determinar separadamente a transformada inversa de funções mais simples.

Apêndice B

Parâmetros do sistema

Símbolo	Descrição	Valor / Unidade
K_{f1}	Constante de rigidez linear do primeiro piso	500 N/m
K_{f2}	Constante de rigidez linear do segundo piso	500 N/m
K_t	Constante de torção do motor	0.00767 N.m/A
K_m	Constante de força electromotriz	0.00767 V.s/rad
K_g	Relação da engrenagem da caixa planetária	3.71
B_{eq}	Coefficiente de amortecimento viscoso equivalente	3.0 N.s/m
η_g	Eficiência da caixa planetária	100%
η_m	Eficiência do motor	100%
J_m	Momento de inércia do rotor	$3.90 \times 10^7 \text{ Kg.m}^2$
M_{f1}	Massa do primeiro piso	1.160 kg
M_{f2}	Massa do segundo piso (com cremalheira)	1.380 kg
M_c	Massa total do carro (com duas massas adicionais)	0.650 kg
r_{mp}	Raio do pinhão do motor	$6.35 \times 10^{-3} \text{ m}$
R_m	Resistência da armadura do motor	2.6 Ω

B.1 Representação matricial do sistema em espaço de estados

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{K_{f2}M_c}{(M_{f2}+M_c)c_3+M_{f2}M_c} & -\frac{B_{eq}(M_c+M_2)-c_1(M_2+M_c)}{(M_2+M_c)c_3+M_2M_c} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_{f1}}{M_{f1}} & \frac{K_{f2}}{M_{f1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{f1}}{M_{f1}} & \frac{-K_{f2}M_c^2}{(M_{f2}+M_c)((M+M_c)c_3+(M_{f2}M_c))} - \frac{K_{f2}}{M_{f1}-\frac{K_{f2}}{M_{f2}+M_c}} & \frac{(c_1+B_{eq})(M_{f2}M_c+M_c^2)}{(M_{f2}+M_c)((M_{f2}+M_c)c_3+(M_{f2}M_c))} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{c_2(M_{f2}+M_c)}{(M_{f2}+M_c)c_3+M_{f2}M_c} \\ 0 \\ -\frac{c_2(M_{f2}M_c+M_c^2)}{(M_{f2}+M_c)((M_{f2}+M_c)c_3+(M_{f2}M_c))} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_{f1}}{M_{f1}} & \frac{K_{f2}}{M_{f1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_{f1}}{M_{f1}} & -\frac{K_{f2}M_c^2}{(M_{f2}+M_c)((M_{f2}+M_c)c_3+(M_{f2}M_c))} - \frac{K_{f2}}{\frac{M_{f1}-K_{f2}}{(M_{f2}+M_c)}} & \frac{(c_1+B_{eq})(M_{f2}M_c+M_c)}{(M_{f2}+M_c)((M_{f2}+M_c)c_3+(M_{f2}M_c))} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{c_2(M_{f2}M_c+M_c^2)}{(M_{f2}+M_c)((M_{f2}+M_c)c_3+(M_{f2}M_c))} \end{bmatrix}$$

Sendo as variáveis c_1 , c_2 e c_3 igual a:

$$c_1 = \frac{(K_g^2 K_t K_m)}{(R_m r_{mp}^2)}$$

$$c_2 = \frac{(K_g K_t)}{(R_m r_{mp}^2)}$$

$$c_3 = \frac{(K_g^2 J_m)}{(r_{mp}^2)}$$

Apêndice C

Programa em Matlab do observador de estados

Abaixo é apresentado o manuscrito do Matlab que em primeiro passa o modelo contínuo para discreto, de seguida escolhe os ganhos de LQR, forma um o filtro de Kalman para estimar o observador de estados, logo existe uma combinação entre o controlador e o observador. Por fim apresenta a diferença entre os estados efectivos e os estados estimados do sistema devido às condições iniciais não nulas impostas e à função impulso unitário.

```
% Criar um modelo contínuo %
```

```
planta = ss(A, B, C, D, 'Entrada', 'Força de controlo F_c (Volts)', 'Saídas', ... {'deslocamento  
x_c (m)', 'aceleração ddx_f_1(m/s^2)', 'aceleração ddx_f_2(m/s^2)'}))
```

```
set(planta, 'StateName', {'deslocamento x_c', 'deslocamento x_f_1', 'deslocamento x_f_2',  
'velocidade dx_c', 'velocidade dx_f_1', 'velocidade dx_f_2'})
```

```
%-----%
```

```
% Criar um modelo discreto com um tempo de amostragem de T=0.001 s %
```

```
T = 0.001;
```

```
ZOH = c2d(planta, T, 'zoh');
```

```
[Ad, Bd, Cd, Dd] = ssdata(ZOH); % Ad, Bd, Cd, Dd são as variáveis de entrada e de saída  
no modelo discreto %
```

```
%-----%
```

% a) Criar o regulador LQR com o ganho K %

R = [0.10]

Q = diag([156,110000,160000, 44,25,25]); % Regulador escolhido do caso 6 (regra de Bryson)
da subsecção 5.1.3 %

K = dlqr(Ad, Bd, Q, R);

%-----%

% b) Cálculo do observador (ganho do filtro de Kalman) %

v = 0.01^2 * eye(3); % Assume-se 1% do ruído de cada sensor, depois vai-se variando este
valor para 5% para cada sensor por fim assumindo o valor do ruído diferente para cada sensor
%

w = entrada('Estimador w: '); % Vai-se variando este valor por forma que o vector estimado
se aproxime o mais rápido do vector de estado %

sensores = [1,2,3]; % variáveis medidas pelos sensores x_c , ddx_f_1 e ddx_f_2%

medido = [1]; % força u

P = ss(Ad, [Bd Bd], C, [D D], T);

[Observador, L_K] = kalman(P, W, V, [], sensores, medido);

%-----%

% c) Criar o regulador e o sistema de malha fechada %

lqg_reg = lqgreg(Observador, K, 'current');

feedin = [1]; % força u

feedout = [1, 2,3]; % xc ,af1 af2

Gcl1 = feedback(ZOH, lqg_reg, feedin, feedout, +1);

%-----%

% d) Gráficos da resposta a condições iniciais não nulas %

x0 = zeros(12,1);

x0(2) = 0.01; % deslocamento imposto de 10 mm no piso 1 %


```

x0(3) = 0.01; % deslocamento imposto de 10 mm no piso 2 %

figure(1), clf

initial(Gcl1,x0)

% Gráficos do vector de estado e dos estados observados t = 5s (condições iniciais não nulas)
%

[y, t, x] = initial(Gcl, x0, 5);

figure(2), clf

subplot(3,2,1), stairs(t,x(:, [1 7])), grid, legend('x_c', 'x_c Obs', 0)

xlabel('Tempo (s)')

subplot(3,2,2), stairs(t,x(:, [2 8])), grid, legend('x_f_1', 'x_f_1 Obs', 0)

xlabel('Tempo (s)')

subplot(3,2,3), stairs(t,x(:, [3 9])), grid, legend('x_f_2', 'x_f_2 Obs', 0)

xlabel('Tempo (s)')

subplot(3,2,4), stairs(t,x(:, [4 10])), grid, legend('dx_c', 'dx_c Obs', 0)

xlabel('Tempo (s)')

subplot(3,2,5), stairs(t,x(:, [5 11])), grid, legend('dx_f_1', 'dx_f_1 Obs', 0)

xlabel('Tempo (s)')

subplot(3,2,6), stairs(t,x(:, [6 12])), grid, legend('dx_f_2', 'dx_f_2 Obs', 0)

xlabel('Tempo (s)')

% Gráficos da resposta à função impulso unitário t = 5s %

figure(3), clf

impulse(Gcl1,5)

% Gráficos do vector de estado e dos estados observados (função impulso unitário)%

[y, t, x] = impulse(Gcl1,5);

figure(4), clf

```

```
subplot(3,2,1), stairs(t,x(:, [1 7])), grid, legend('x_c', 'x_c Obs', 0)
```

```
xlabel('Tempo (s)')
```

```
subplot(3,2,2), stairs(t,x(:, [2 8])), grid, legend('x_f_1', 'x_f_1 Obs', 0)
```

```
xlabel('Tempo (s)')
```

```
subplot(3,2,3), stairs(t,x(:, [3 9])), grid, legend('x_f_2', 'x_f_2 Obs', 0)
```

```
xlabel('Tempo (s)')
```

```
subplot(3,2,4), stairs(t,x(:, [4 10])), grid, legend('dx_c', 'dx_c Obs', 0)
```

```
xlabel('Tempo (s)')
```

```
subplot(3,2,5), stairs(t,x(:, [5 11])), grid, legend('dx_f_1', 'dx_f_1 Obs', 0)
```

```
xlabel('Tempo (s)')
```

```
subplot(3,2,6), stairs(t,x(:, [6 12])), grid, legend('dx_f_2', 'dx_f_2 Obs', 0)
```

```
xlabel('Tempo (s)')
```

Apêndice D

Apresentação de resultados com AMD fixo/AMD passivo

- Sismo de Kobe

O sismo de Kobe ocorreu no dia 17 de Janeiro de 1995 pelas 05:46 horas locais, com o seu epicentro a 20 km da cidade de Kobe, registando uma magnitude de 6.8, ocorrendo durante cerca de 20 segundos,[41] e [33]. Na Figura D.1 está representado o sinal de perturbação correspondente ao sismo de Kobe usado neste trabalho, escalado para a mesa sísmica disponível no Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa.

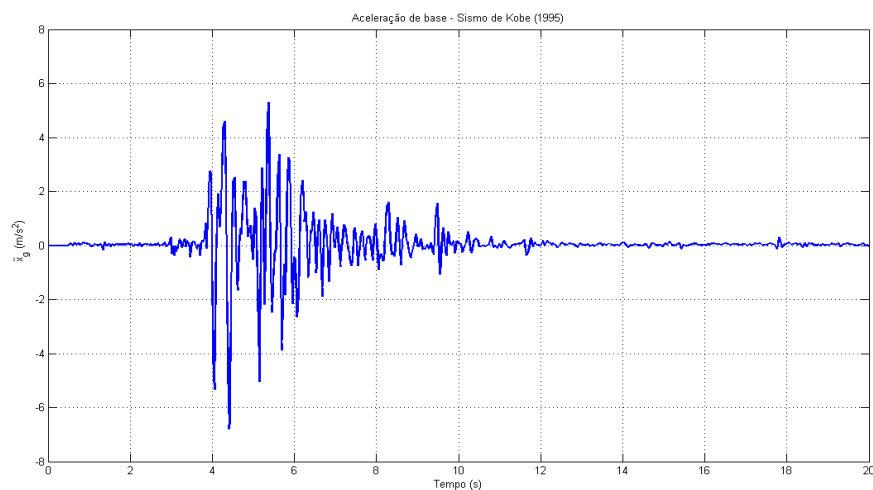


Figura D.1: Sinal equivalente a aceleração de base do sismo de Kobe

A Figura D.2 permite comparar as acelerações relativas obtidas para ambos os pisos.

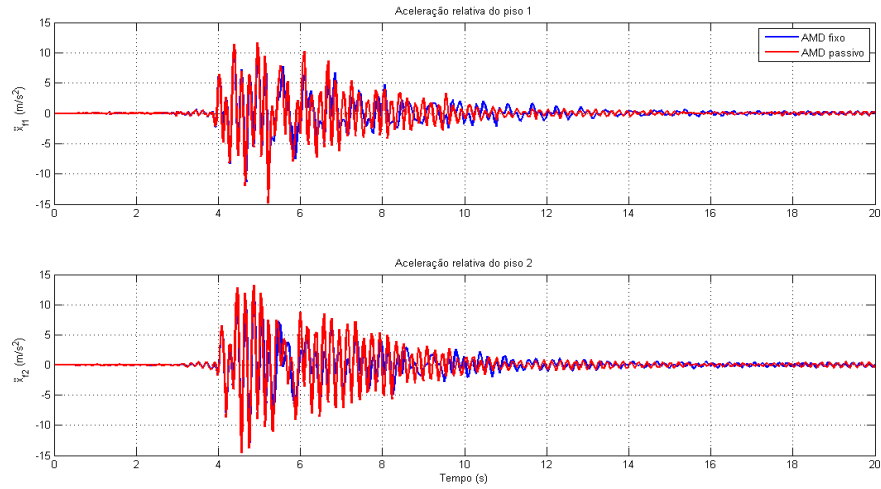


Figura D.2: Acelerações relativas dos pisos - Sismo de Kobe

Os deslocamentos relativos dos pisos estão dispostos gráficamente através da Figura D.3 .

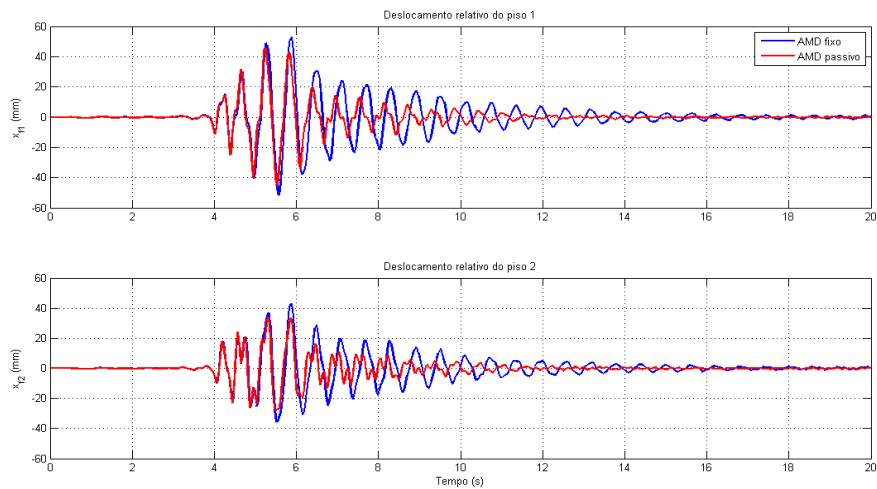


Figura D.3: Deslocamentos relativos dos pisos - Sismo de Kobe

- Sismo de Friuli

O sismo de Friuli ocorreu no dia 6 de Maio de 1976 pelas 21:06 horas locais, com o seu epicentro em Gemona del Friuli (Itália), registando uma magnitude de 6.4 na escala de Richter,[19]. Na Figura D.4 está representado o sinal de perturbação correspondente ao sismo de Friuli.

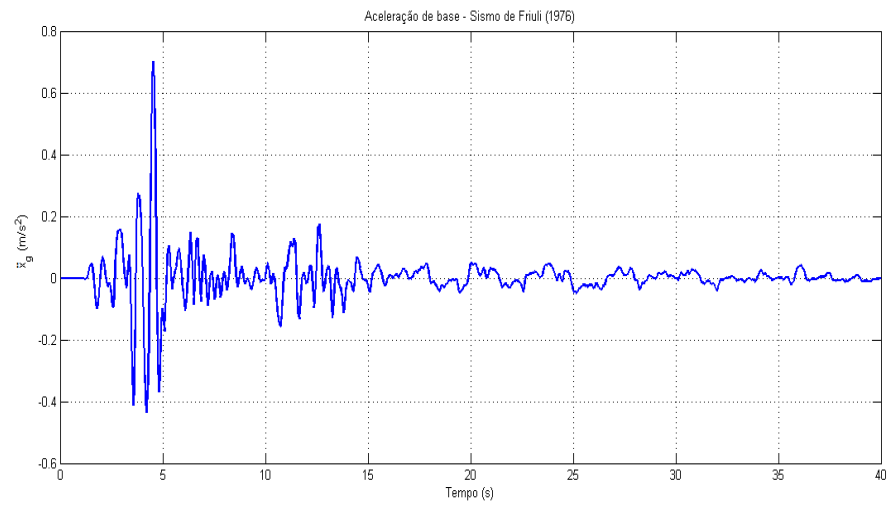


Figura D.4: Sinal equivalente a aceleração de base do sismo de Friuli

A Figura D.5 permite comparar as acelerações relativas obtidas para ambos os pisos.

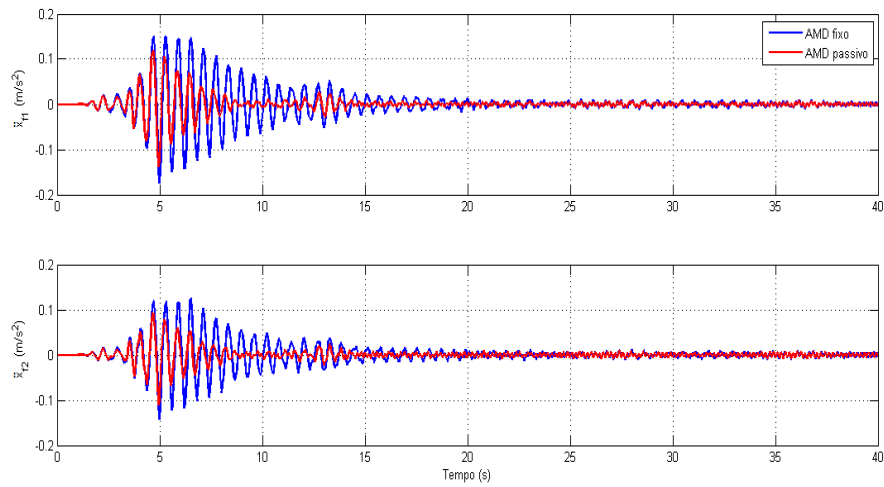


Figura D.5: Acelerações relativas dos pisos - Sismo de Friuli

Os deslocamentos relativos dos pisos estão dispostos graficamente através da Figura D.6 .

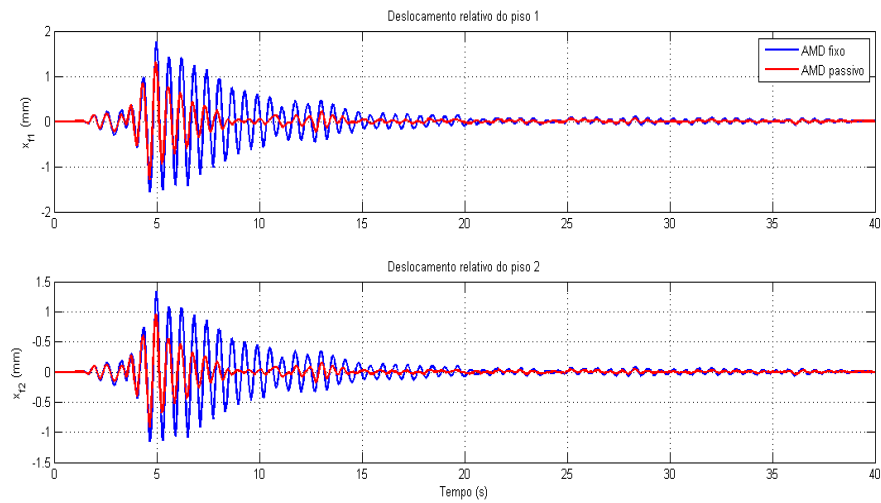


Figura D.6: Deslocamentos relativos dos pisos - Sismo de Friuli

- Sismo de Northridge

O sismo de Northridge ocorreu no dia 17 de Janeiro de 1994 pelas 04:30 horas locais, com o seu epicentro em Resenda a cerca de 32 km de Los Angeles, registando uma magnitude de 6.7 na escala de Richter, ocorrendo durante 10 a 20 segundos,[40]. Na Figura D.7 está representado o sinal de perturbação correspondente ao sismo de Northridge.

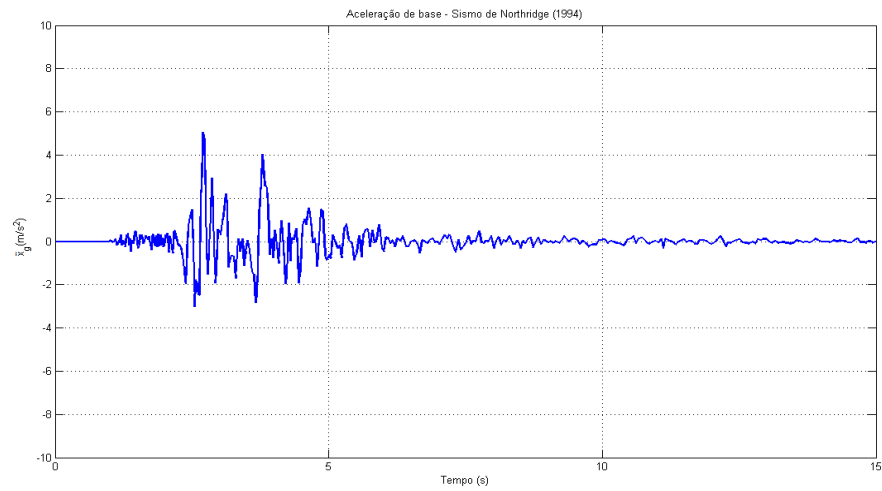


Figura D.7: Sinal equivalente a aceleração de base do sismo de Northridge

A Figura D.8 permite comparar as acelerações relativas obtidas para ambos os pisos.

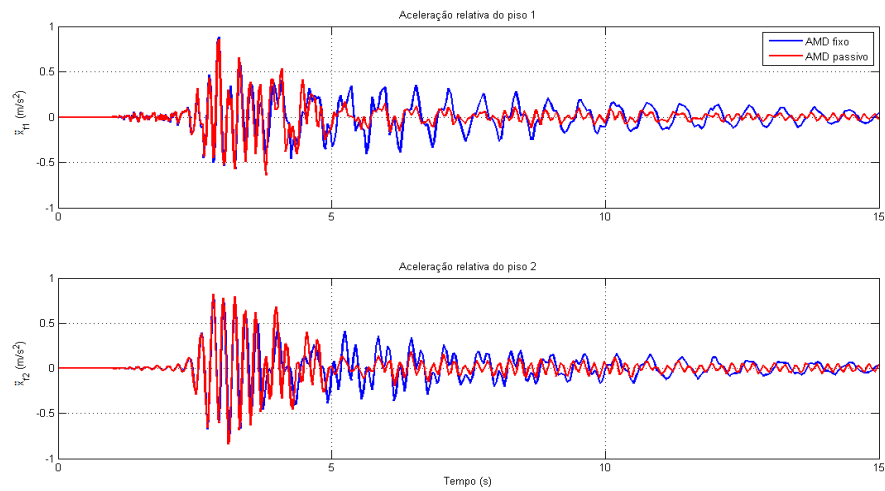


Figura D.8: Acelerações relativas dos pisos - Sismo de Northridge

Os deslocamentos relativos dos pisos estão dispostos graficamente através da Figura D.9 .

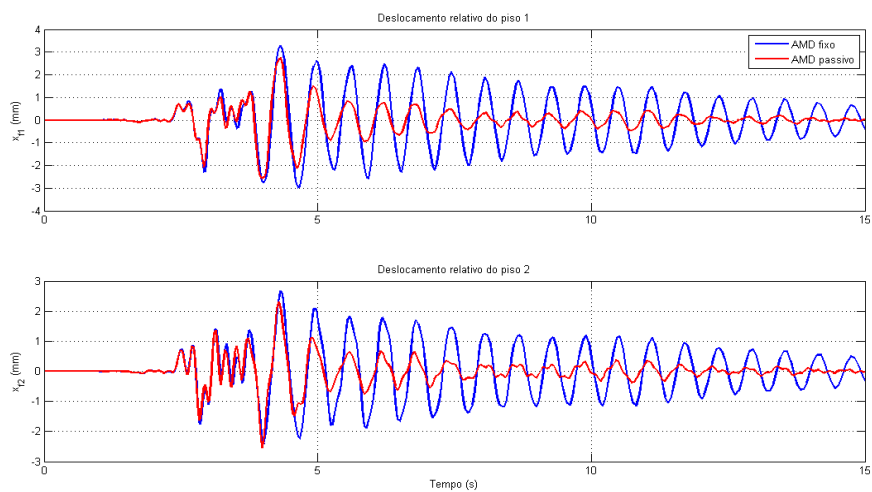


Figura D.9: Deslocamentos relativos dos pisos - Sismo de Northridge

Apêndice E

Apresentação de resultados com AMD passivo/AMD activo

- Sismo de Kobe

A Figura E.1 permite comparar as acelerações relativas obtidas para ambos os pisos.

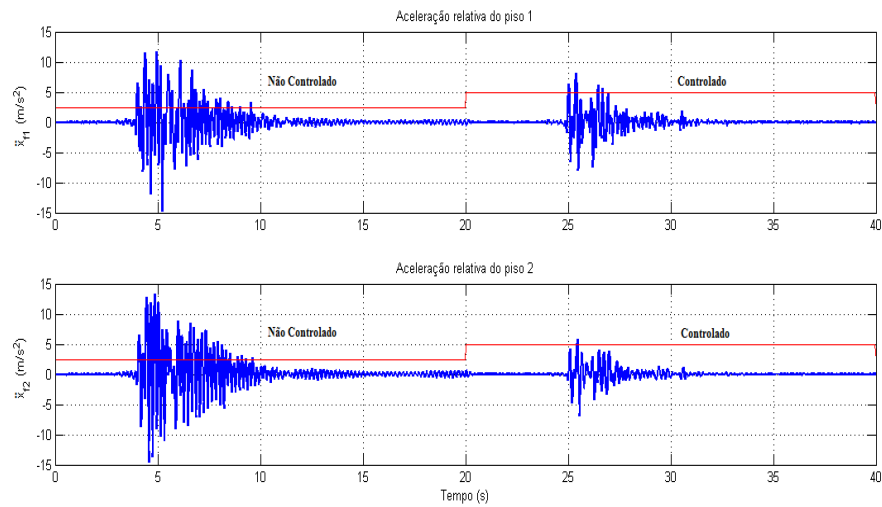


Figura E.1: Acelerações relativas dos pisos via LQG - Sismo de Kobe

Os deslocamentos relativos dos pisos e do AMD estão dispostos gráficamente através da Figura E.2.

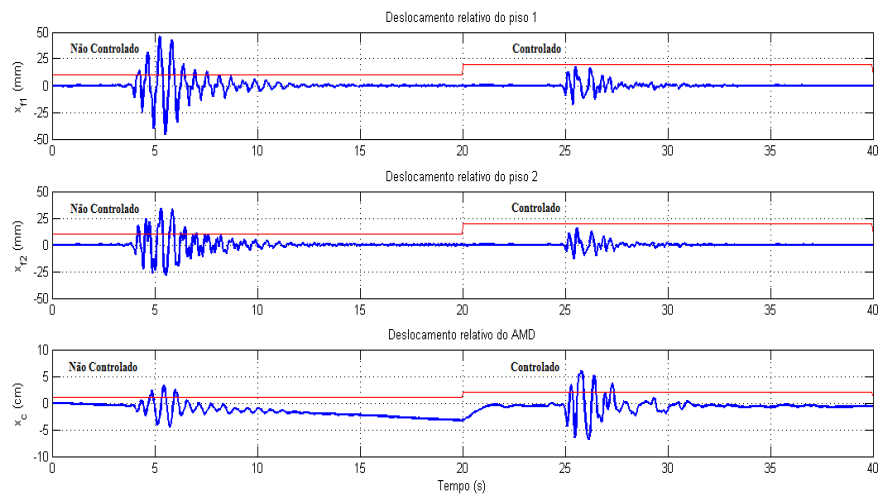


Figura E.2: Deslocamentos relativos dos pisos e do AMD via LQG - Sismo de Kobe

Para avaliar o comportamento do controlador, a Figura E.3 demonstra os registos da voltagem dispendida para absorver as vibrações.

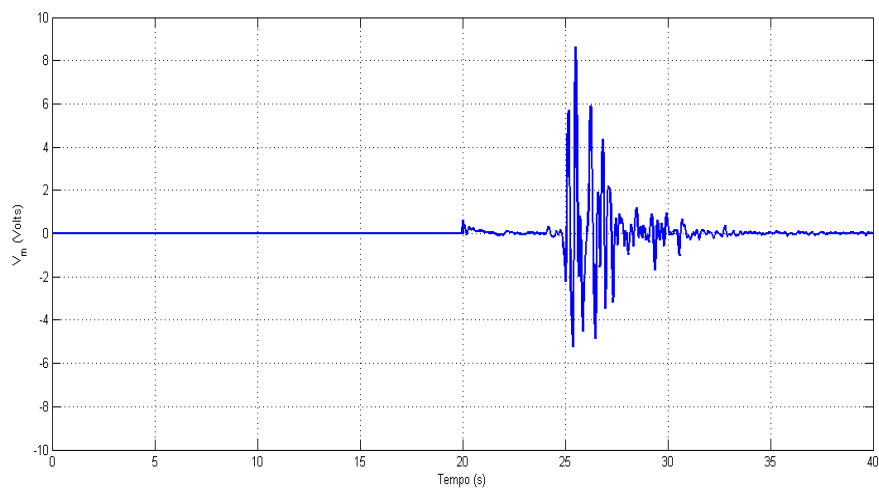


Figura E.3: Diferença de potencial via LQG - Sismo de Kobe

- Sismo de Friuli

A Figura E.4 permite comparar as acelerações relativas obtidas para ambos os pisos.

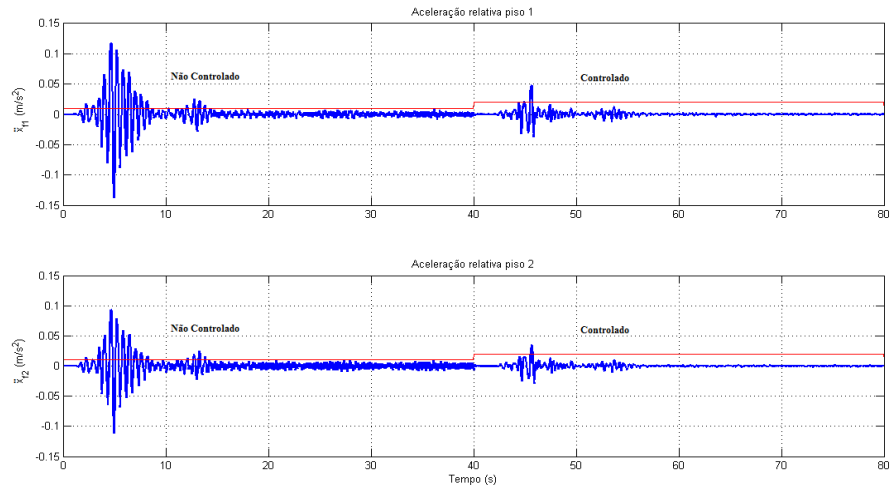


Figura E.4: Acelerações relativas dos pisos via LQG - Sismo de Friuli

Os deslocamentos relativos dos pisos e do AMD estão dispostos graficamente através da Figura E.5.

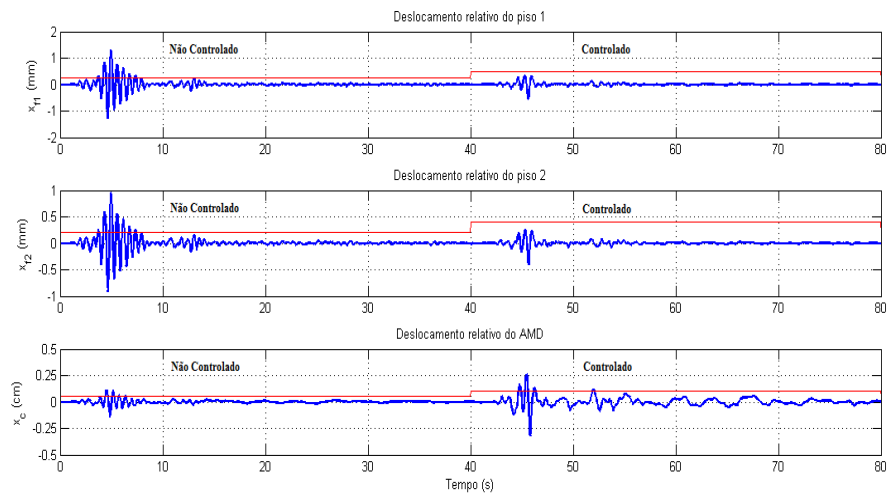


Figura E.5: Deslocamentos relativos dos pisos e do AMD via LQG - Sismo de Friuli

Para avaliar o comportamento do controlador, a Figura E.6 demonstra os registos da voltagem dispendida para absorver as vibrações.

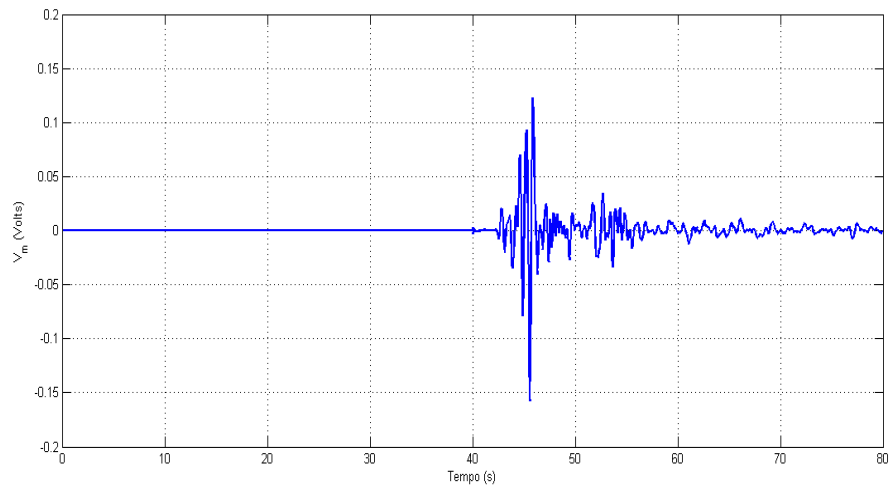


Figura E.6: Diferença de potencial via LQG - Sismo de Friuli

- Sismo de Northridge

A Figura E.7 permite comparar as acelerações relativas obtidas para ambos os pisos.

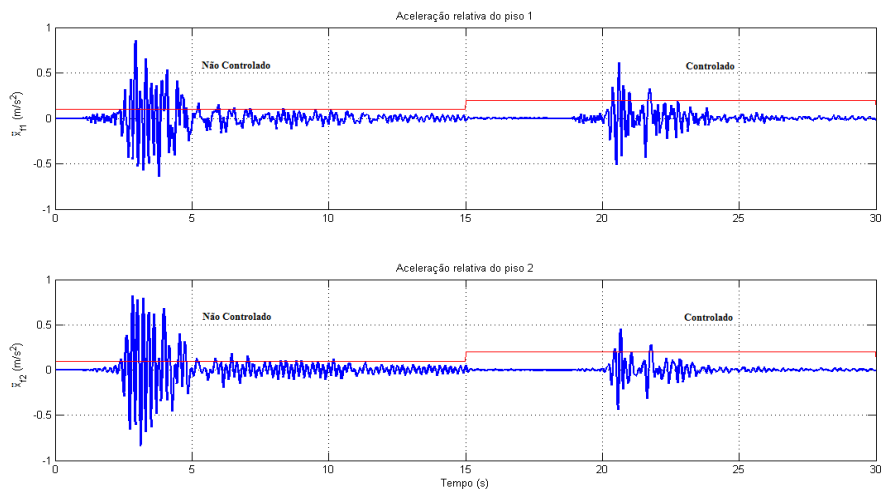


Figura E.7: Acelerações relativas dos pisos via LQG - Sismo de Northridge

Os deslocamentos relativos dos pisos e do AMD estão dispostos graficamente através da Figura E.8.

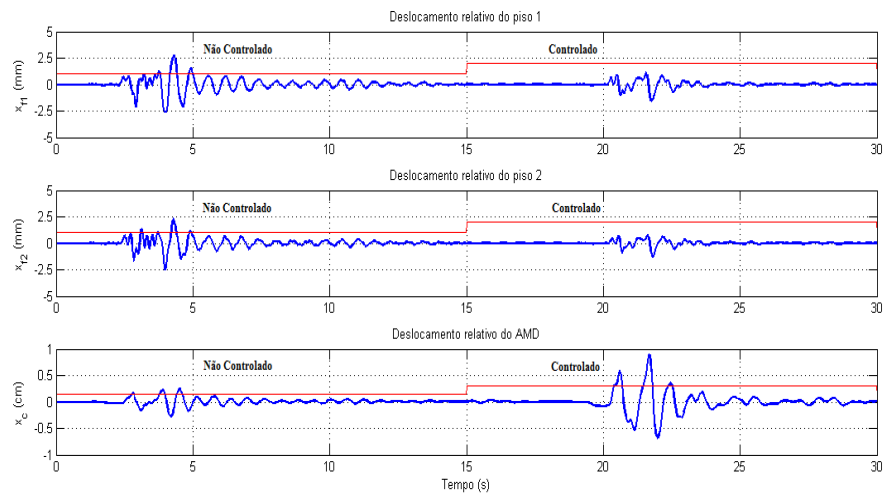


Figura E.8: Deslocamentos relativos dos pisos e do AMD via LQG - Sismo de Northridge

Para avaliar o comportamento do controlador, a Figura E.9 demonstra os registros da voltagem dissipada para absorver as vibrações.

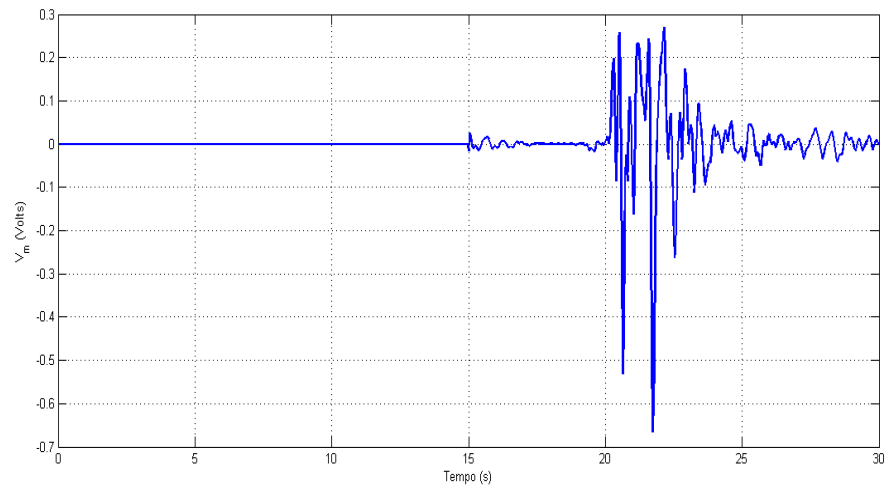


Figura E.9: Diferença de potencial via LQG - Sismo de Northridge